Ministerul Educației și Cercetării

Rodica PERJOIU • Ioana STOICA • Mihaela Mariana ȚURA

Fizică

Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică și specializarea științe ale naturii

Manual pentru clasa a IX-a

Aramis
AROBS Transilvania Software
București, 2026

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației nr. .../... .

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital.

Inspectoratul Școlar .....

Școala/Colegiul/Liceul .....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: **nou, **bun**, **îngrijit**, **neîngrijit**, **deteriorat**.*

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți: Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU, Facultatea de Fizica, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Dr. Constantin COREGA

Redactare: Gabriela Caracaș
DTP și copertă: Carmen Diana Mateescu
Corectură: Eugenia Oprea

ISBN 978-606-009-706-8

Copyright © 2026 Aramis Print s.r.l. toate drepturile rezervate

Aramis Print s.r.l. • Redacția și sediul social: B-dul Metalurgiei nr. 46-56, cod 041833, sector 4, București, O.P. 82 – C.P. 38
Tel.: 021.461.08.10/14/15; fax: 021.461.08.09/19; e-mail: office@edituraaramis.ro
Departamentul desfacere: tel.: 021.461.08.08/12/13/16; fax: 021.461.08.09/19; e-mail: desfacere@edituraaramis.ro
www.librariaaramis.ro

CUPRINS

Competențe 5
Instrucțiuni de utilizare a manualului 7

1. Noțiuni introductive și metode de lucru în fizică 9
1.1. Măsurări în fizică. Mărimi fizice și unități de măsură 10
1.2. Tipuri de erori. Incertitudinea măsurării 14
Test de evaluare 18

2. Elemente de cinematică 19
2.1. Descrierea mișcării corpurilor 20
2.2. Viteza și accelerația 24
2.3. Tipuri de mișcări 29
2.3.1. Mișcarea rectilinie uniformă 31
2.3.2. Mișcarea rectilinie uniform variată 40
2.3.3. Mișcarea circulară uniformă 45
Test de evaluare 52

3. Principiile mecanicii newtoniene și aplicarea acestora 53
3.1. Principiile dinamicii newtoniene 54
3.2. Interacțiuni prin contact 62
3.2.1. Forțe de apăsare, forțe de frecare 62
3.2.2. Forța deformatoare. Legea lui Hooke. Forța elastică. Tensiunea mecanică 66
3.3. Dinamica mișcării circulare uniforme 76
3.4. Interacțiuni prin câmpuri: Interacțiunea gravitațională 81
3.4.1. Legea atracției gravitaționale 81
3.4.2. Câmpul gravitațional 83
Test de evaluare 90

4. Teoreme de variație și legi de conservare în mecanică 91
4.1. Lucrul mecanic 92
4.2. Lucrul mecanic al unor tipuri de forțe 96
4.3. Puterea mecanică. Randamentul 101
4.4. Energia cinetică. Teorema variației energiei cinetice 104
4.5. Energia potențială 106
4.5.1. Energia potențială gravitațională 106
4.5.2. Energia potențială elastică 107
4.6. Energia mecanică. Teorema de variație a energiei mecanice. Legea conservării energiei mecanice 109
4.7. Impulsul mecanic 114
4.7.1. Teorema variației impulsului punctului material 114
4.7.2. Teorema variației impulsului unui sistem de puncte materiale 115
4.7.3. Legea conservării impulsului unui sistem de puncte materiale 115
Test de evaluare 126

5. Echilibrul mecanic 127
5.1. Momentul forței 128
5.2. Echilibrul de translație și de rotație 131
5.3. Centrul de greutate 133
Test de evaluare 140

6. Temă integratoare 141
6.1. Elemente de siguranță rutieră (timp de reacție, distanță de frânare, rază de viraj) 142
Test de evaluare 148

7. Elemente de mecanică cerească (opțional) 149
7.1. Legile lui Kepler 150
7.2. Mișcarea planetelor și a sateliților 157

8. Noțiuni de mecanica fluidelor 165
8.1. Noțiuni de statica fluidelor 166
8.2. Fluidul ideal. Curgerea laminară 177
8.3. Debit. Ecuația de continuitate 180
8.4. Legea lui Bernoulli 182
8.5. Aplicații practice 187
Investighează, descoperă, învață 196

La plimbare prin Sistemul Solar 198
Teme individuale 200

Indicații și răspunsuri 200



COMPETENȚE-CHEIE

Competențe-cheie
• Competența de citire, scriere și înțelegere a mesajului (**CG4**)
• Competența matematică și competența în științe, tehnologie și inginerie (**CG1, CG2, CG3**)
• Competența digitală, inclusiv de siguranță pe internet și securitate cibernetică (**CG1, CG3**)
• Competența personală, socială și a învăța să înveți. Competența civică, juridică și de protejare a mediului (**CG2, CG3, CG5)**

COMPETENȚE GENERALE ȘI COMPETENȚE SPECIFICE

Competențe generale	Competențe specifice
1. Investighează științific structuri, stări și fenomene fizice pentru a formula concluzii bazate pe dovezi, în contexte variate	1.1. Explorează proprietăți și fenomene fizice, în situații simple și controlabile, pentru a formula observații relevante și întrebări de investigat. 1.2. Proiectează investigații experimentale simple pentru a testa ipoteze cu privire la proprietăți și fenomene fizice. 1.3. Realizează experimente, utilizând instrumente și procedee corespunzătoare, pentru a colecta și organiza date experimentale. 1.4. Prelucrează dirijat date obținute din investigații experimentale simple pentru a formula concluzii pertinente.
2. Explică științific fenomene fizice și aplicații ale acestora pentru a transfera cunoașterea în contexte reale	2.1. Evidențiază condiții de producere a fenomenelor observate pentru a identifica relații cauzale între mărimi fizice. 2.2. Aplică legi și principii fizice pentru a descrie fenomenele fizice studiate. 2.3. Utilizează reprezentări calitative/cantitative pentru a descrie fenomenele fizice studiate. 2.4. Identifică fenomene fizice studiate care sunt relevante pentru explicarea unor evenimente din contexte reale.
3. Rezolvă probleme și situații-problemă pentru a fundamenta soluții eficiente, sigure și sustenabile	3.1. Identifică informațiile relevante dintr-o problemă definită pentru a descrie situația de rezolvat. 3.2. Utilizează scheme, tabele sau reprezentări grafice pentru a evidenția conexiunile dintre datele problemei. 3.3. Aplică principii, legi și teoreme ale fizicii pentru a rezolva probleme definite în contexte cunoscute. 3.4. Analizează rezultatele obținute în urma rezolvării problemelor pentru a le valida.

COMPETENȚE GENERALE ȘI COMPETENȚE SPECIFICE

Competențe generale	Competențe specifice
4. Comunică eficient informații, raționamente și concluzii științifice, utilizând limbajul specific fizicii, pentru a susține decizii argumentate	4.1. Utilizează limbajul specific fizicii și convențiile internaționale pentru a exprima corect informații și rezultate teoretice sau experimentale. 4.2. Reprezintă date experimentale prin tabele și grafice pentru a susține comunicarea clară a concluziilor. 4.3. Redactează rapoarte de laborator simple pentru a structura observațiile, metodele și concluziile investigațiilor. 4.4. Prezintă oral sau în scris raționamente pentru a susține soluții la probleme definite
5. Evaluează impactul științei și tehnologiei asupra individului, societății și mediului pentru a adopta comportamente etice și responsabile	5.1. Identifică aplicații ale științei și tehnologiei utilizate în viața cotidiană pentru a recunoaște efectele acestora asupra individului, societății și mediului. 5.2. Recunoaște influența științei și tehnologiei asupra vieții sociale pentru a conștientiza responsabilitatea individuală și colectivă.

Fișa de observare sistematică a activității și a comportamentului

Completează această fișă la sfârșitul fiecărui capitol!

La finalul capitolului mă gândesc dacă:	Încă lucrez la asta.	Uneori.	De cele mai multe ori.	Întotdeauna.
Am fost curios/curioasă și interesat(ă) să descopăr lucruri noi.				
Am depus efort pentru a-mi îndeplini sarcinile cât mai bine.				
Am cerut ajutor atunci când am întâmpinat greutăți.				
Am privit greșelile ca pe oportunități de învățare.				
M-am implicat cu entuziasm în activități.				
Mi-am exprimat ideile clar și argumentat.				
Am colaborat eficient și respectuos cu colegii.				
Sunt mulțumit(ă) de progresul meu referitor la acest capitol.				

Instrucțiuni de utilizare a manualului

Manualul este organizat în opt capitole, în conformitate cu programa școlară pentru clasa a IX-a.

Fiecare capitol cuprinde lecții de predare-învățare, activități experimentale, aplicații/probleme rezolvate și, la final, câte un test de evaluare.

Pagini de deschidere a unității



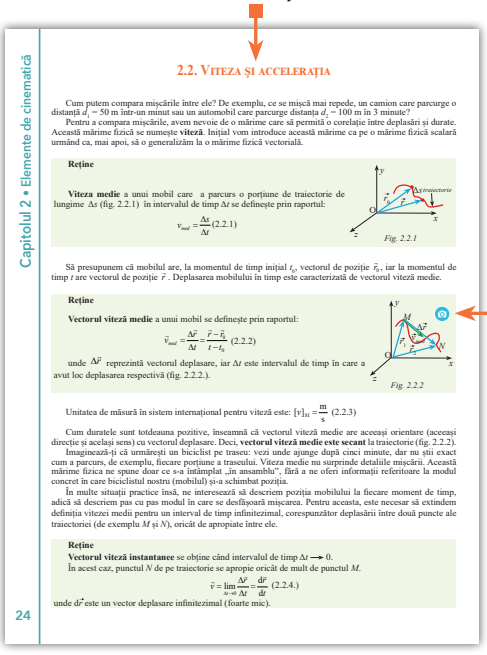
Titlul și numărul capitolului



Comportamente asociate competențelor specifice și conținuturilor

Pagini de învățare

Titlul lecției

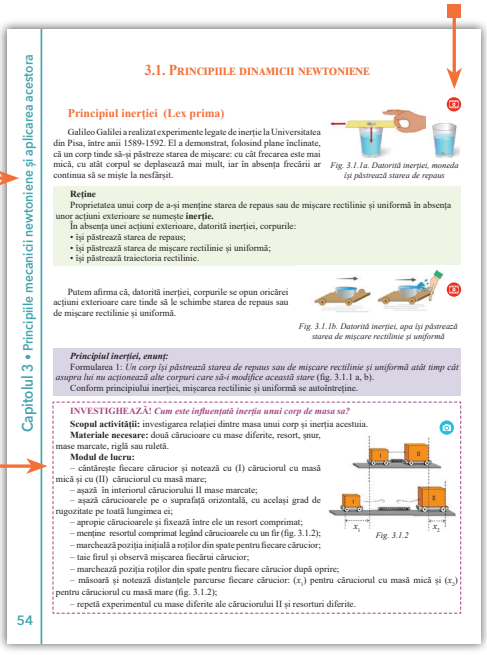


Titlul și numărul capitolului

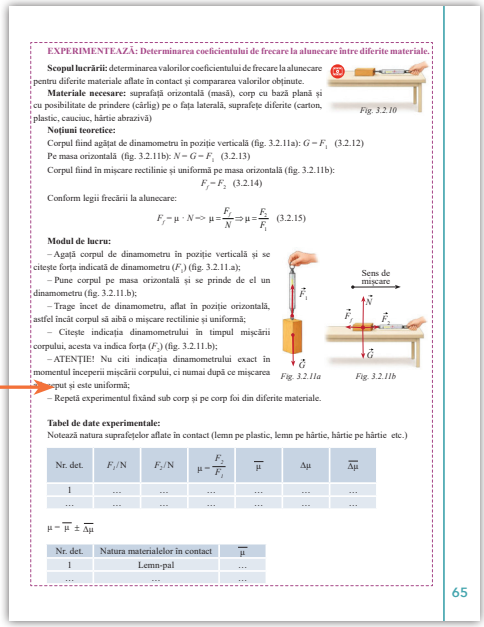
Trimitere către imaginea din varianta digitală

Investigație

Trimitere către animația din manualul digital



Lucrare de laborator



EXPERIMENTEAZĂ: Determinarea coeficientului de frecare la alunecare între diferite materiale.

Scopul lucrării: determinarea valorilor coeficientului de frecare la alunecare pentru diferite materiale aflate în contact și compararea valorilor obținute.

Materiale necesare: suprafață orizontală (masă), corp cu bază plană și cu posibilitate de prindere (cârlig) pe o față laterală, suprafețe diferite (carton, plastic, cauciuc, hârtie abrazivă)

Noțiuni teoretice:

Corpul fiind agățat de dinamometru în poziție verticală (fig. 3.2.11a): $G = F_1$ (3.2.12)

Pe masa orizontală (fig. 3.2.11b): $N = G = F_2$ (3.2.13)

Corpul fiind în mișcare rectilinie și uniformă pe masa orizontală (fig. 3.2.11b):

$F_f = F_2$ (3.2.14)

Conform legii frecării la alunecare:

$F_f = \mu \cdot N \Rightarrow \mu = \frac{F_f}{N} \Rightarrow \mu = \frac{F_2}{F_1}$ (3.2.15)

Modul de lucru:

– Agață corpul de dinamometru în poziție verticală și se citește forța indicată de dinamometru (F_1) (fig. 3.2.11.a);

– Pune corpul pe masa orizontală și se prinde de el un dinamometru (fig. 3.2.11.b);

– Trage încet de dinamometru, aflat în poziție orizontală, astfel încât corpul să aibă o mișcare rectilinie și uniformă;

– Citește indicația dinamometrului în timpul mișcării corpului, acesta va indica forța (F_2) (fig. 3.2.11.b);

– ATENȚIE! Nu citi indicația dinamometrului exact în momentul începerii mișcării corpului, ci numai după ce mișcarea este uniformă;

– Repetă experimentul fixând sub corp și pe corp foi din diferite materiale.

Fig. 3.2.10

Fig. 3.2.11a

Fig. 3.2.11b

Tabel de date experimentale:

Notează natura suprafețelor aflate în contact (lemn pe plastic, lemn pe hârtie, hârtie pe hârtie etc.)

Nr. det.	F_1/N	F_2/N	$\mu = \frac{F_2}{F_1}$	$\overline{\mu}$	$\Delta\mu$	$\overline{\Delta\mu}$
1	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…

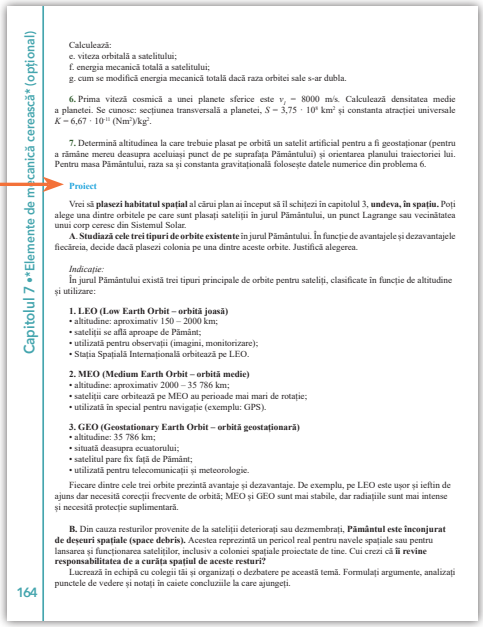
$\mu = \overline{\mu} \pm \overline{\Delta\mu}$

Nr. det.	Natura materialelor în contact	$\overline{\mu}$
1	Lemn-pal	…
…	…	…

65

Pagină de evaluare

Proiect



Capitolul 7 • *Elemente de mecanică cerească* (opțional)

Calculează:
e. viteza orbitală a satelitului;
f. energia mecanică totală a satelitului;
g. cum se modifică energia mecanică totală dacă raza orbitei sale s-ar dubla.

6. Prima viteză cosmică a unei planete sferice este $v_1 = 8000$ m/s. Calculează densitatea medie a planetei. Se cunosc: secțiunea transversală a planetei, $S = 3{,}75 \cdot 10^8$ km^2 și constanta atracției universale $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (Nm^2)/kg^2.

7. Determină altitudinea la care trebuie plasat pe orbită un satelit artificial pentru a fi geostaționar (pentru a rămâne mereu deasupra aceluiași punct de pe suprafața Pământului) și orientarea planului traiectoriei lui. Pentru masa Pământului, raza sa și constanta gravitațională folosește datele numerice din problema 6.

Proiect

Vrei să **plasezi habitatul spațial** al cărui plan ai început să îl schițezi în capitolul 3, **undeva, în spațiu.** Poți alege una dintre orbitele pe care sunt plasați sateliții în jurul Pământului, un punct Lagrange sau vecinătatea unui corp ceresc din Sistemul Solar.

A. Studiază cele trei tipuri de orbite existente în jurul Pământului. În funcție de avantajele și dezavantajele fiecăreia, decide dacă plasezi colonia pe una dintre aceste orbite. Justifică alegerea.

Indicație:
În jurul Pământului există trei tipuri principale de orbite pentru sateliți, clasificate în funcție de altitudine și utilizare:

1. LEO (Low Earth Orbit – orbită joasă)
- altitudine: aproximativ 150 – 2000 km;
- sateliții se află aproape de Pământ;
- utilizată pentru observații (imagini, monitorizare);
- Stația Spațială Internațională orbitează pe LEO.

2. MEO (Medium Earth Orbit – orbită medie)
- altitudine: aproximativ 2000 – 35 786 km;
- sateliții care orbitează pe MEO au perioade mai mari de rotație;
- utilizată în special pentru navigație (exemplu: GPS).

3. GEO (Geostationary Earth Orbit – orbită geostaționară)
- altitudine: 35 786 km;
- situată deasupra ecuatorului;
- satelitul pare fix față de Pământ;
- utilizată pentru telecomunicații și meteorologie.

Fiecare dintre cele trei orbite prezintă avantaje și dezavantaje. De exemplu, pe LEO este ușor și ieftin de ajuns dar necesită corecții frecvente de orbită; MEO și GEO sunt mai stabile, dar radiațiile sunt mai intense și necesită protecție suplimentară.

B. Din cauza resturilor provenite de la sateliții deteriorați sau dezmembrați, **Pământul este înconjurat de deșeuri spațiale (space debris).** Acestea reprezintă un pericol real pentru navele spațiale sau pentru lansarea și funcționarea sateliților, inclusiv a coloniei spațiale proiectate de tine. Cui crezi că **îi revine responsabilitatea de a curăța spațiul de aceste resturi?**

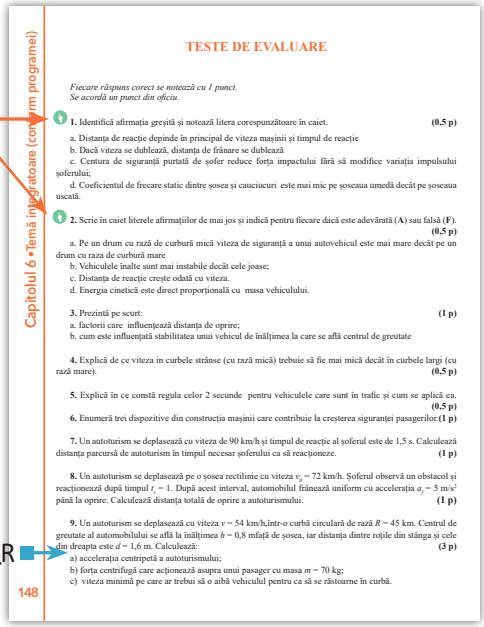
Lucrează în echipă cu colegii tăi și organizați o dezbatere pe această temă. Formulați argumente, analizați punctele de vedere și notați în caiete concluziile la care ajungeți.

164

Pagină de aplicații/probleme rezolvate

Activități interactive

Cod QR



Capitolul 6 • Tema integratoare (conform programei)

TESTE DE EVALUARE

Fiecare răspuns corect se notează cu 1 punct.
Se acordă un punct din oficiu.

1. Identifică afirmația greșită și notează litera corespunzătoare în caiet. **(0,5 p)**

a. Distanța de reacție depinde în principal de viteza mașinii și timpul de reacție
b. Dacă viteza se dublează, distanța de frânare se dublează
c. Centura de siguranță purtată de șofer reduce forța impactului fără să modifice variația impulsului șoferului;
d. Coeficientul de frecare static dintre șosea și cauciucuri este mai mic pe șoseaua umedă decât pe șoseaua uscată.

2. Scrie în caiet literele afirmațiilor de mai jos și indică pentru fiecare dacă este adevărată (**A**) sau falsă (**F**). **(0,5 p)**

a. Pe un drum cu razã de curburã micã viteza de siguranță a unui autovehicul este mai mare decât pe un drum cu raza de curburã mare
b. Vehiculele înalte sunt mai instabile decât cele joase;
c. Distanța de reacție crește odată cu viteza.
d. Energia cinetică este direct proporțională cu masa vehiculului.

3. Prezintă pe scurt: **(1 p)**

a. factorii care influențează distanța de oprire;
b. cum este influențată stabilitatea unui vehicul de înălțimea la care se află centrul de greutate

4. Explică de ce viteza în curbele strânse (cu rază mică) trebuie să fie mai mică decât în curbele largi (cu rază mare). **(0,5 p)**

5. Explică în ce constă regula celor 2 secunde pentru vehiculele care sunt în trafic și cum se aplică ea. **(0,5 p)**

6. Enumeră trei dispozitive din construcția mașinii care contribuie la creșterea siguranței pasagerilor.**(1 p)**

7. Un autoturism se deplasează cu viteza de 90 km/h și timpul de reacție al șoferul este de 1,5 s. Calculează distanța parcursă de autoturism în timpul necesar șoferului ca să reacționeze. **(1 p)**

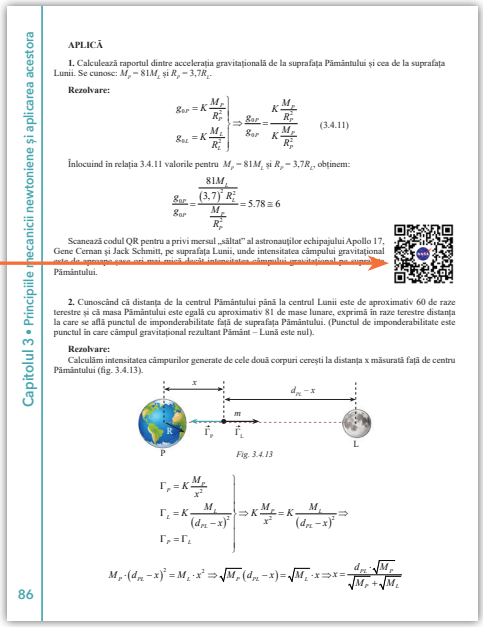
8. Un autoturism se deplasează pe o șosea rectilinie cu viteza $v_0 = 72$ km/h. Șoferul observă un obstacol și reacționează după timpul $t_r = 1$. După acest interval, automobilul frânează uniform cu accelerația $a_f = 5$ m/s^2 până la oprire. Calculează distanța totală de oprire a autoturismului. **(1 p)**

9. Un autoturism se deplasează cu viteza $v = 54$ km/h,într-o curbă circulară de rază $R = 45$ km. Centrul de greutate al automobilului se află la înălțimea $h = 0{,}8$ mfață de șosea, iar distanța dintre roțile din stânga și cele din dreapta este $d = 1{,}6$ m. Calculează: **(3 p)**

a) accelerația centripetă a autoturismului;
b) forța centrifugă care acționează asupra unui pasager cu masa $m = 70$ kg;
c) viteza minimă pe care ar trebui să o aibă vehiculul pentru ca să se răstoarne în curbă.

148

Cod QR



Capitolul 3 • Principiile mecanicii newtoniene și aplicarea acestora

APLICĂ

1. Calculează raportul dintre accelerația gravitațională de la suprafața Pământului și cea de la suprafața Lunii. Se cunosc: $M_P = 81M_L$ și $R_P = 3{,}7R_L$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{aligned} g_{SP} &= K\frac{M_P}{R_P^2} \\ g_{SL} &= K\frac{M_L}{R_L^2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{g_{SP}}{g_{SP}} = \frac{K\frac{M_P}{R_P^2}}{K\frac{M_L}{R_P^2}} \quad (3.4.11)$$

Înlocuind în relația 3.4.11 valorile pentru $M_P = 81M_L$ și $R_P = 3{,}7R_L$, obținem:

$$\frac{g_{SP}}{g_{SP}} = \frac{\frac{81M_L}{(3{,}7)^2 R_L^2}}{\frac{M_L}{R_L^2}} = 5{,}78 \cong 6$$

Scanează codul QR pentru a privi mersul „săltat" al astronauților echipajului Apollo 17. Gene Cernan și Jack Schmitt, pe suprafața Lunii, unde intensitatea câmpului gravitațional este de aproape șase ori mai mică decât intensitatea câmpului gravitațional pe suprafața Pământului.

2. Cunoscând că distanța de la centrul Pământului până la centrul Lunii este de aproximativ 60 de raze terestre și că masa Pământului este egală cu aproximativ 81 de mase lunare, exprimă în raze terestre distanța la care se află punctul de imponderabilitate față de suprafața Pământului. (Punctul de imponderabilitate este punctul în care câmpul gravitațional rezultant Pământ – Lună este nul).

Rezolvare:

Calculăm intensitatea câmpurilor generate de cele două corpuri cerești la distanța x măsurată față de centrul Pământului (fig. 3.4.13).

Fig. 3.4.13

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_P &= K\frac{M_P}{x^2} \\ \Gamma_L &= K\frac{M_L}{(d_{PL}-x)^2} \\ \Gamma_P &= \Gamma_L \end{aligned}\right| \Rightarrow K\frac{M_P}{x^2} = K\frac{M_L}{(d_{PL}-x)^2} \Rightarrow$$

$$M_P \cdot (d_{PL}-x)^2 = M_L \cdot x^2 \Rightarrow \sqrt{M_P}(d_{PL}-x) = \sqrt{M_L} \cdot x \Rightarrow x = \frac{d_{PL} \cdot \sqrt{M_P}}{\sqrt{M_P}+\sqrt{M_L}}$$

86

Manualul este disponibil atât în varianta tipărită, cât și în varianta digitală, aceasta din urmă fiind similară celei tipărite, dar îmbogățită cu peste 170 de activități multimedia interactive de învățare (AMII), menite să sporească valoarea cognitivă. Activitățile multimedia sunt de mai multe tipuri și sunt marcate prin simboluri specifice:

- AMII static, pentru observarea dirijată a unei imagini semnificative.
- Activitate interactivă, de tip exercițiu sau joc cu feedback imediat.
- AMII animat – filmuleț sau scurtă animație.

Versiunea digitală include, la început, instrucțiuni detaliate privind structura meniului și modul de navigare.



La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să utilizezi mărimile fizice și unitățile din Sistemul Internațional în descrierea fenomenelor și în calcule simple;
- să selectezi instrumentele de măsură adecvate și să efectuezi corect măsurările directe respectând regulile de citire a scalei;
- să exprimi rezultatele folosind cifre semnificative și să identifici tipurile de erori de măsurare;
- să determini incertitudinea, propagarea acesteia în calcule simple și să apreciezi validitatea rezultatului final.

Capitolul 1

Noțiuni introductive și metode de lucru în fizică

1.1. Măsurări în fizică. Mărimi fizice și unități de măsură

Universul în care trăim este complex, însă multe fenomene pot fi explicate printr-un număr redus de legi fizice. Fizica studiază interacțiunile dintre materie și energie în spațiu și timp, urmărind identificarea cauzelor fundamentale ale fenomenelor naturale. Legile și teoriile sunt formulate pe baza observațiilor și a experimentelor. Modelele științifice permit interpretarea datelor și formularea de predicții, dar sunt acceptate doar atât timp cât sunt confirmate experimental; dacă apar rezultate care le contrazic, acestea trebuie revizuite.

Mărime fizică. Unitate de măsură. Sistemul Internațional de Unități (SI)

Definiție

Mărimea fizică este o proprietate fizică observabilă și măsurabilă a unui sistem, proces sau stare, cuantificabilă[1] și exprimată printr-o valoare numerică și o unitate de măsură. Valoarea mărimii fizice este produsul dintre număr și unitatea de măsură.

Există mărimi fizice măsurabile direct (de exemplu: distanța și timpul) și mărimi fizice măsurabile indirect (de exemplu: viteza medie, definită prin raportul dintre distanța parcursă și timpul de deplasare).

Mărimile fizice sunt de două feluri, scalare și vectoriale.

Reține

O **mărime scalară** este o mărime fizică descrisă complet doar printr-o **valoare numerică** și o referință (de regulă, o **unitate de măsură**).

Exemple: masa, temperatura, durata, energia, volumul, distanța parcursă etc.

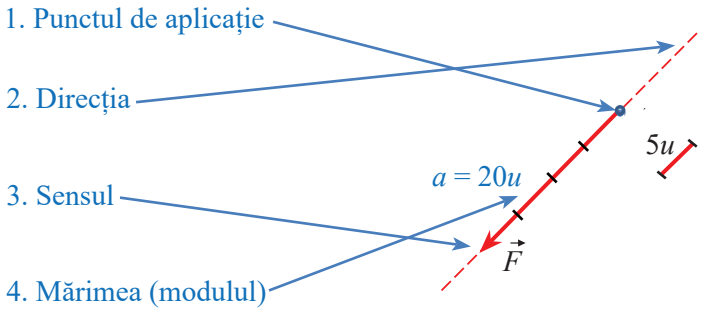
Reține

O **mărime vectorială** este o mărime fizică descrisă prin: **valoare numerică (modul)**, **unitate de măsură, punct de aplicație, direcție** și **sens**.

Exemple: **forța**, **viteza**, **accelerația**, **deplasarea**.

Atenție: *deplasarea este vector, dar distanța parcursă este scalară.*

O mărime fizică vectorială se reprezintă printr-un **segment de dreaptă orientat (săgeată)**. Pentru reprezentarea unui vector, trebuie precizată **o scală** – adică corespondența dintre **lungimea unui segment** și **valoarea numerică** a mărimii.



Reține

• Notația $\vec{a}$ este totdeauna atașată unui segment de dreaptă orientat și presupune cunoașterea tuturor caracteristicilor vectorului *a* (punct de aplicație, direcție, sens și mărime).

• Notația *a* ($a = 20\ u$) corespunde numai mărimii vectorului.

Rezultatele măsurărilor sunt exprimate, de obicei, în unități standardizate.

Exemplu: lungimea unei curse, care este o mărime fizică, poate fi exprimată în unități de metri (pentru sprinteri) sau kilometri (pentru alergătorii de maraton). Fără unități standardizate, le-ar fi extrem de dificil oamenilor de știință să exprime și să compare valorile măsurate într-un mod cu adevărat semnificativ.

[1] **Cuantificabil** înseamnă „**care poate fi măsurat și exprimat numeric**”, adică i se poate atribui o valoare numerică.

Există două tipuri de măsurări ale mărimilor fizice: directe și indirecte.

Măsurarea directă a unei mărimi fizice înseamnă compararea acesteia cu o mărime de același fel, aleasă ca unitate sau etalon (de exemplu: măsurarea unei lungimi, a unei mase, a duratei unui fenomen).

În *măsurarea indirectă*, valoarea mărimii fizice se obține în urma calculelor efectuate cu ajutorul altor mărimi fizice (de exemplu: pentru determinarea vitezei unei mașini, trebuie efectuate măsurări pentru distanța parcursă și pentru intervalul de timp în care a avut loc deplasarea).

Reține

A măsura o mărime fizică înseamnă a o compara cu o altă mărime de aceeași natură, aleasă, prin convenție, ca unitate de măsură.

Stabilirea unităților de măsură se face prin convenții internaționale.



La nivel internațional, în 1960, s-a convenit să existe un sistem unic de mărimi și unități de măsură pentru știință, tehnologie, industrie și comerț, numit **Sistemul Internațional de Mărimi și Unități** (abrevierea fiind **SI**). Acesta se aplică în România din 1960.

Scanează codul QR alăturat pentru a afla mai multe informații despre **SI**.

În **SI** sunt definite **7 unități de măsură fundamentale** (metru – m, kilogram – kg, secundă – s, kelvin – K, mol – mol, amper – A, candela – cd) și **22 de unități derivate**, cu denumiri și simboluri speciale, definite ca produse ale unităților fundamentale, de exemplu: newton – pentru forță $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$, pascal – pentru presiune $Pa = \frac{N}{m^2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$, joule – pentru energie $J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$, watt – pentru putere $W = \frac{J}{s} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$, coulomb – pentru sarcina electrică $C = A \cdot s$, volt – pentru diferența de potențial $V = \frac{W}{A} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$, ohm – pentru rezistența electrică $\Omega = \frac{V}{A} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$, radian – pentru unghi măsurat în plan rad = m / m etc.

Cele 7 unități fundamentale și cele 22 de unități derivate pot fi utilizate în combinație pentru a exprima unitățile altor mărimi derivate, de exemplu: m^2 pentru arie, $m \cdot s^{-1}$ pentru viteză, $m \cdot s^{-2}$ pentru accelerație, $kg \cdot m^{-3}$ pentru densitate etc.

Multipli și submultipli

Ordinul de mărime al unei mărimi fizice se referă la partea întreagă a puterii lui 10 care descrie cât de mare sau mică este valoarea.

Multiplii și submultiplii zecimali, corespunzători puterilor lui 10 cuprinse între 10^{30} și 10^{-30}, sunt stabiliți pentru a fi utilizate în asociere cu unitățile SI.

Puterea lui 10	Prefix	Simbol	Puterea lui 10	Prefix	Simbol
10^{30}	quetta	Q	10^{-1}	deci	d
10^{27}	ronna	R	10^{-2}	centi	c
10^{24}	yotta	Y	10^{-3}	mili	m
10^{21}	zetta	Z	10^{-6}	micro	μ
10^{18}	exa	E	10^{-9}	nano	n
10^{15}	peta	P	10^{-12}	pico	p

Puterea lui 10	Prefix	Simbol	Puterea lui 10	Prefix	Simbol
10^{12}	tera	T	10^{-15}	femto	f
10^{9}	giga	G	10^{-18}	atto	a
10^{6}	mega	M	10^{-21}	zepto	z
10^{3}	kilo	k	10^{-24}	yocto	y
10^{2}	hecto	h	10^{-27}	ronto	r
10^{1}	deca	da	10^{-30}	quecto	q

Gruparea formată prin atașarea unui simbol de prefix la un simbol de unitate constituie un nou simbol de unitate inseparabil (care formează un multiplu sau un submultiplu al unității respective), care poate fi ridicat la o putere pozitivă sau negativă și care poate fi combinat cu alte simboluri de unități pentru a forma simboluri de unități compuse.

Exemple:

– pm (picometru), mmol (milimol), GΩ (gigaohm), THz (terahertz)

– $2{,}3\ \text{cm}^3 = 2{,}3\ (\text{cm})^3 = 2{,}3\ (10^{-2}\ \text{m})^3 = 2{,}3 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$

– $1\ \text{cm}^{-1} = 1\ (\text{cm})^{-1} = 1\ (10^{-2}\ \text{m})^{-1} = 10^2\ \text{m}^{-1} = 100\ \text{m}^{-1}$

Instrumente de măsură



În fizică, **măsurarea** este operația prin care se determină valoarea unei mărimi fizice, prin compararea acesteia cu o **unitate de măsură**. Măsurările se realizează cu ajutorul **instrumentelor de măsură**, iar rezultatele obținute sunt influențate atât de caracteristicile instrumentelor, cât și de modul de efectuare a măsurării.

Definiție

Instrumentul de măsură este un dispozitiv utilizat pentru determinarea experimentală a valorii unei mărimi fizice, prin raportare la o unitate de măsură stabilită, de regulă din **Sistemul Internațional de Unități** (SI).

Caracteristicile instrumentelor de măsură

1. Domeniul de măsurare

Domeniul de măsurare reprezintă intervalul de valori ale mărimii fizice pentru care instrumentul poate fi utilizat corect.

Exemplu: O riglă de 30 cm are domeniul de măsurare 0 – 30 cm și nu poate fi utilizată pentru măsurarea directă a unor lungimi mai mari.

2. Unitatea de măsură

Unitatea de măsură este unitatea în care se exprimă rezultatul măsurării și este indicată pe instrument.

Exemplu: La riglă, unitatea de măsură este metrul și submultiplii săi (cm, mm).

3. Diviziunea minimă

Diviziunea minimă este cea mai mică valoare a mărimii fizice care poate fi citită direct pe scala instrumentului și se numește rezoluția instrumentului.

Exemplu: Pentru o riglă gradată din milimetru în milimetru, diviziunea minimă este 1 mm.

4. Sensibilitatea instrumentului

Sensibilitatea reprezintă capacitatea instrumentului de a măsura variații mici ale mărimii măsurate.

Exemplu: Un termometru care indică variații de 0,1°C este mai sensibil decât unul care indică doar variații de 1°C.

5. Eroarea de măsurare

Orice măsurare este afectată de o eroare. În cazul instrumentelor cu scală gradată, incertitudinea instrumentală este, de regulă, egală cu jumătate din diviziunea minimă.

Exemplu: Pentru o riglă cu diviziunea minimă de 1 mm, eroarea instrumentală este ± 0,5 mm.

Exactitatea (acuratețea) unui rezultat exprimă cât de apropiată este valoarea măsurată de valoarea adevărată a mărimii. Ea poate fi îmbunătățită prin identificarea și corectarea erorilor sistematice (calibrare, metode, influențe constante).

Precizia măsurării arată cât de apropiate sunt între ele mai multe măsurări repetate ale aceleiași mărimi. Precizia depinde de calitatea instrumentului și este legată de incertitudinea de măsurare.

Incertitudinea de măsurare ($x \pm \Delta x$, unde x este valoarea măsurată, iar Δx este incertitudinea de măsurare) reprezintă intervalul în care se estimează că se află valoarea adevărată a mărimii, pe baza măsurărilor efectuate și a limitărilor instrumentului.

Exemplu: La măsurarea lungimii unei laturi a unei cărți, aplicarea corecțiilor de temperatură și de citire a condus de la $L = 0{,}299$ m la $L = 0{,}297$ m, crescând exactitatea rezultatului. Precizia măsurării a rămas determinată de rigla utilizată. Dacă diviziunea minimă a riglei este 1 mm, atunci incertitudinea de citire se poate lua aproximativ ± 0,5 mm, iar rezultatul se scrie:

$$L = (0{,}2970 \pm 0{,}0005) \text{ m}.$$

Concluzie: Un rezultat al unei măsurări poate fi precis, dar inexact, sau exact, dar puțin precis. Observațiile științifice de cea mai bună calitate sunt atât exacte, cât și precise.

Cifre semnificative

Valoarea numerică a unei mărimi fizice măsurate trebuie să conțină atâtea cifre câte sunt semnificative pentru măsurarea efectuată.

Definiție

O cifră semnificativă este oricare cifră 1, 2, …, 9, a unui număr care este folosită pentru a arăta mărimea numărului, indiferent de poziția virgulei, dacă numărul este scris sub formă zecimală. Cifra zero se consideră semnificativă dacă se află în interiorul numărului sau la dreapta acestuia.

Exemplu: Dacă prin măsurare se obțin următoarele valori: 12,5 cm, 12,9 cm și 12,8 cm, valoarea medie calculată este un număr cu o infinitate de zecimale − 12,7333333… cm. Având în vedere faptul că precizia riglei cu care s-a efectuat măsurarea este de 1 mm = 0,1 cm, toate cifrele care se scriu după cifra care reprezintă numărul de milimetri nu au nicio semnificație. Prin urmare, valoarea medie va fi 12,7 cm.

Dacă un număr trebuie rotunjit la un număr de cifre semnificative, trebuie respectate următoarele **reguli**:

– Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative.

Exemplu: 349,4 are 4 cifre semnificative; 2892,5 are 5 cifre semnificative.

– Zerourile aflate între alte cifre sunt semnificative.

Exemplu: 3049,4 are 5 cifre semnificative; 208902,5 are 7 cifre semnificative.

– Zerourile aflate la dreapta unui număr pot să nu fie semnificative.

Exemplu: 3490 are trei cifre semnificative, adică incertitudinea măsurătorii respective afectează ultimele două cifre; 10000 are o singură cifră semnificativă, adică incertitudinea măsurătorii afectează ultimele 5 cifre (aceasta ar fi o măsurare foarte imprecisă).

– Zerourile din fața unui număr zecimal nu sunt semnificative.

Exemplu: 0,00046 are două cifre semnificative; 0,12304 are 5 cifre semnificative.

– Pentru numerele zecimale, zerourile din dreapta cifrei sunt semnificative.

Exemple: 0,1230400 are 7 cifre semnificative; 2,00 are trei cifre semnificative.

APLICĂ

Rotunjește numerele din tabel la 1 cifră, 2 cifre, 3 cifre semnificative.

Rezolvare:

Număr	Rotunjire la 1 cifră semnificativă	Rotunjire la 2 cifre semnificative	Rotunjire la 3 cifre semnificative
45291	50000	45000	45300
567,54	600	570	568
7,3792	7	7,4	7,38
99,8721	100	100	99,9
8053	8000	8100	8050
0,7003	0,7	0,70	0,700

1.2. Tipuri de erori. Incertitudinea măsurării

Eroare de măsurare

Orice măsurare este afectată de erori. După cauza care le produce, erorile pot fi: sistematice, întâmplătoare și grosolane.

1. Erorile sistematice au trei surse posibile:

a) *Erori de observator*: citirea indicațiilor instrumentului de măsură privind oblic scala acestuia.

b) *Erori de instrument*: apar atunci când un aparat de măsură indică în mod constant o valoare mai mare sau mai mică decât valoarea reală, din cauza unor probleme precum calibrarea greșită sau defectarea instrumentului. Eroarea de instrument (de citire) se estimează, de obicei, astfel:

• la instrumente analogice (cu scală): aproximativ ± ½ din diviziunea minimă;

• la instrumente digitale: aproximativ ± ½ din ultima unitate afișată.

c) *Erori de metodă*: în timpul efectuării măsurării, sistemul măsurat interacționează cu instrumentul de măsură, ceea ce modifică rezultatul măsurării.

Oricare ar fi cauzele erorilor sistematice, ele au o caracteristică comună: se admite că valoarea unei măsurări individuale este aceeași ori de câte ori repetăm măsurarea, ca urmare și eroarea este aceeași.

2. Erorile întâmplătoare apar din cele mai diverse cauze. De multe ori, ele sunt atât de mici, încât efectul lor nu poate fi sesizat (variația temperaturii în procesul de măsurare, modificări ale legii de mișcare din cauza unor curenți slabi de aer etc.).

3. Erorile grosolane apar în urma deteriorării condițiilor principale ale măsurării sau a neatenției/nepriceperii experimentatorului. De exemplu, citirea incorectă a unui instrument de măsurare din cauza iluminării insuficiente a locului de muncă, folosirea unor instrumente defecte, sau procedee de măsură care conduc la apariția în setul de date experimentale a unor valori care diferă semnificativ de majoritatea celorlalte date. Caracteristica esențială a erorilor grosolane este aceea că ele implică valori măsurate care se abat semnificativ de la valoarea medie. Erorile grosolane se elimină la începutul operației de analiză a rezultatelor și, pe cât posibil, se înlocuiesc cu valori găsite în urma altor măsurări, efectuate în condiții corecte.

Erorile de măsură

Pentru măsurarea unei mărimi fizice, trebuie stabilite: unitatea de măsură, procedeul de măsurare și instrumentul de măsură.

Fie X – valoarea adevărată a unei mărimi fizice, iar x – rezultatul măsurării.

Definiții

Eroarea absolută: $\Delta x = x - X$ (diferența dintre rezultatul măsurării, x, și valoarea adevărată a mărimii măsurate, X).

Prin urmare, valoarea adevărată este cuprinsă în intervalul: $x - |\Delta x| \le X \le x + |\Delta x|$.

Eroarea relativă a valorii aproximative: $\delta = \dfrac{|\Delta x|}{x}$, pentru $X \neq 0$.

Eroarea relativă procentuală: $\delta_{\%} = \dfrac{|\Delta x|}{X} \cdot 100$.

Exactitatea unui rezultat este o măsură a apropierii valorii numerice a rezultatului față de valoarea adevărată; exactitatea este, deci, o măsură a acurateței unui rezultat.

Valoarea medie a mărimii fizice măsurate reprezintă cea mai bună estimare a valorii adevărate și se calculează ca media aritmetică a celor n valori măsurate: $\overline{x} = \dfrac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n}$.

Incertitudinea măsurării este modulul diferenței dintre valoarea măsurată, x_n, și valoarea medie, $\overline{x}$:

$$|\Delta x_n| = |x_n - \overline{x}|$$

Incertitudinea medie reprezintă media aritmetică a incertitudinilor absolute față de valoarea medie a tuturor citirilor:

$$\overline{\Delta x} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n}{n}.$$

Rezultatul măsurării mărimii fizice: $x = \overline{x} \pm \overline{\Delta x}$.

Observație: O măsurare este cu atât mai precisă cu cât incertitudinea și, respectiv, incertitudinea relativă sunt mai mici.

APLICĂ

1. La măsurarea lungimii aceleiași bare, opt elevi au obținut următoarele rezultate: 28,6 cm; 28,8 cm; 28,7 cm; 26,6 cm; 28,5 cm; 28,9 cm; 28,8 cm; 28,6 cm. Calculează incertitudinea, incertitudinea medie și scrie rezultatul măsurării.

Rezolvare:

De regulă, datele obținute se trec în tabelul de date de forma:

Nr. măs.	ℓ /cm	ℓ /cm	$\Delta \ell_n$/cm	$\Delta \ell$ /cm
1	28,6	28,7	0,1	0,114
2	28,8		0,1	
3	28,7		0,0	
4	26,6		–	
5	28,5		0,2	
6	28,9		0,2	
7	28,8		0,1	
8	28,6		0,1	

Eroare grosolană – se renunță la această valoare

Având în vedere faptul că precizia riglei este de 1 mm = 0,1 cm, atunci rezultatul se va scrie: $\ell = (28,7 \pm 0,1)$ cm.

2. O bară are lungimea de 200 cm. În urma unei măsurări a fost stabilită o valoare a lungimii egală cu 201 cm. Distanța dintre punctele A și B este de 5000 m. În urma măsurării s-a obținut distanța de 4997 m. Să se determine incertitudinea relativă a fiecărei măsurări și să se precizeze care măsurare este mai precisă.

Rezolvare:

Pentru prima măsurare: $\Delta\ell = |200 - 201| = 1$ cm; $\delta = \frac{1}{200} = 0,005$.

Pentru măsurarea a doua: $\Delta L = |5000 - 4997| = 3$ cm; $\delta = \frac{3}{5000} = 0,0006$.

Incertitudinea relativă a celei de-a doua măsurări este mai mică, prin urmare, această măsurare este mai precisă.

Adunarea valorilor numerice aproximative

Atunci când se adună două numere aproximative, incertitudinile se adună.

Fie $S = a + b$. Mărimea fizică de interes, S, este obținută prin adunarea a două mărimi fizice direct măsurabile.

Mărimea fizică a este măsurată cu incertitudinea Δa, iar b este măsurat cu incertitudinea Δb.

$$(a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Incertitudinea ΔS a lui S este: $\Delta S = \Delta a + \Delta b$.

Incertitudinea $\Delta a + \Delta b$ reprezintă incertitudinea maximă care afectează suma.

APLICĂ

Evaluarea perimetrului unui dreptunghi.

Rezolvare:

Perimetrul unui dreptunghi a fost măsurat cu ajutorul unei rigle și au fost obținute următoarele valori: $L = (6{,}2 \pm 0{,}1)$ cm și $\ell = (3{,}4 \pm 0{,}1)$ cm.

Știind că $P = 2(L + \ell)$, rezultă: $P = 2 \cdot (6{,}2 + 3{,}4) \pm 2 \cdot (0{,}1 + 0{,}1) = (19{,}2 \pm 0{,}4)$ cm.

Scăderea valorilor numerice aproximative

Atunci când se scad două numere aproximative, incertitudinile se adună.

Diferența, D, a două valori numerice aproximative $a \pm \Delta a$ și $b \pm \Delta b$ este:

$$D = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b) = (a - b) \pm (\Delta a + \Delta b).$$

Înmulțirea valorilor numerice aproximative

Ultimul termen poate fi neglijat (în cazul în care incertitudinile relative sunt mici)

Produsul, P, a două mărimi aproximative este:

$$P = (a \pm \Delta a) \cdot (b \pm \Delta b) = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b \cong ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a = ab \pm ab \cdot \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

$$\Delta P = \underbrace{ab}_{P} \cdot \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) = ab \cdot (\delta_a + \delta_b) \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = \delta_a + \delta_b.$$

Împărțirea valorilor numerice aproximative

Raportul, Q, a două mărimi aproximative este:

$$Q = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} = \frac{a \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)}{b \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)}{\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^2} \cong \frac{a}{b} \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}\right)$$

$$\Delta Q = \underbrace{\frac{a}{b}}_{Q} \cdot \left(\frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}\right) \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = \delta_a + \delta_b.$$

APLICĂ

1. Evaluarea ariei suprafeței unui dreptunghi.

Rezolvare:

Pentru evaluarea ariei suprafeței unui dreptunghi au fost măsurate lungimile laturilor cu ajutorul unei rigle și au fost obținute următoarele valori: $L = (6{,}2 \pm 0{,}1)$ cm și $\ell = (3{,}4 + 0{,}1)$ cm.

Știind că $A = L \cdot \ell$, rezultă incertitudinea: $\Delta A = L \cdot \ell \cdot \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \ell}{\ell}\right)$.

$\Delta A = 6{,}2 \cdot 3{,}4 \cdot \left(\frac{0{,}1}{6{,}2} + \frac{0{,}1}{3{,}4}\right)$ cm^2 = 0,96 cm^2.

2. Constantele elastice a două resorturi au valorile: $k_1 = (150 \pm 2)$ N/m și $k_2 = (350 \pm 3)$ N/m. Să se calculeze incertitudinile și incertitudinile relative când resorturile sunt conectate în: a) paralel; b) serie.

Rezolvare:

a) paralel $k_p = k_1 + k_2$

$$k_p = (150 \pm 2) + (350 \pm 3) = (150 + 350) \pm (2 + 3) = (500 \pm 5) \text{ N/m}$$

Incertitudinea: $\Delta k_p = 5$ N/m.

Incertitudinea *relativă:* $\delta_{k_p} = \dfrac{\Delta k_p}{k_p} = \dfrac{5}{500} = 0,01$.

b) Serie: $k_S = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$, de unde $k_S = \dfrac{150 \cdot 350}{500} = 105$ N/m

$k_1 \cdot k_2 = 52500$ (N/m)^2

$\Delta(k_1k_2) = k_1\,\Delta(k_2) + k_2\,\Delta(k_1) = 150 \cdot 3 + 350 \cdot 2 = 1150$

Incertitudinea *relativă:* $\delta_{k_1k_2} = \dfrac{\Delta(k_1k_2)}{k_1k_2} = \dfrac{1150}{52500} = 0,0219$.

$\delta_{k_s} = \delta_{k_1k_2} + \delta_{k_s} = 0,0219 + 0,01 = 0,0319$.

Incertitudinea: $\Delta k_S = k_S \cdot \delta_{k_s} = 105 \cdot 0,0319 \cong 3,35$ N/m.

Reține

Diferența dintre eroare și incertitudine

În analiza rezultatelor experimentale este important să se facă distincția între eroare și incertitudine, doi termeni înrudiți, dar cu semnificații diferite.

Eroarea unei măsurări este diferența dintre valoarea măsurată și valoarea adevărată a mărimii: $\Delta x = x - X$. Valoarea adevărată nu este cunoscută exact, ci estimată printr-un interval de incertitudine.

Incertitudinea este o estimare a intervalului în care se presupune că se află valoarea adevărată a mărimii măsurate. Rezultatul $x \pm \Delta x$ înseamnă că valoarea reală este estimată între $x - \Delta x$ și $x + \Delta x$.

Exemplu: Dacă este măsurată o lungime și se obține: $L = (20,0 \pm 0,5)$ cm, înseamnă că valoarea adevărată a lungimii este estimată a fi cuprinsă între 19,5 cm și 20,5 cm. Eroarea reală există, dar nu este cunoscută; incertitudinea indică intervalul maxim posibil al acestei erori.

EXERSEAZĂ

Un oceanograf trebuie să iasă cu o barcă pentru a recupera un înregistrator important de date (data logger) pentru temperatură și salinitate, care este atașat la o geamandură subacvatică. Cum ilustrează fiecare dintre următoarele situații diferențele dintre precizie și acuratețe?

1. Oceanograful verifică prognoza meteo în seara dinaintea excursiei, ca să știe cum să se îmbrace pe barcă. Meteorologul de la TV spune că la prânz, a doua zi, vor fi între 26 și 31 grade Celsius (°C). Temperatura reală măsurată a doua zi, pe barcă, la prânz, este 28°C.

2. Când Sistemul de Poziționare Globală (GPS) al oceanografului indică faptul că se află la locația geamandurii subacvatice, el ancorează barca și sare în apă ca să recupereze înregistratorul de date. Totuși, nu poate vedea geamandura. Și celelalte unități GPS ale colegilor lui de pe barcă indică, de asemenea, că sunt la locația corectă. După o căutare îndelungată, oceanograful găsește geamandura la 50 m de barcă.

3. În timp ce se întorc la țărm, oceanograful aruncă o undiță ca să vadă dacă poate prinde ceva pentru cină. Are noroc și prinde peștele. Când îl scoate din apă, colegii lui estimează greutatea peștelui. Estimările lor sunt 16,1 kg, 16,8 kg și 15,9 kg. Când cântăresc peștele după ce se întorc la țărm, greutatea reală este 18,2 kg.

TEST DE EVALUARE

Subiectul I – *Pentru fiecare item se acordă 0,5 puncte.* **2p**

Alege varianta corectă.

1. O mărime fizică este:

a) o proprietate observabilă și măsurabilă, exprimată numeric și prin unitate de măsură;

b) o valoare fără unitate de măsură;

c) un instrument folosit pentru experimente;

d) o regulă de rotunjire a numerelor.

2. Una dintre următoarele mărimi este vectorială:

a) masa b) temperatura c) deplasarea d) durata

3. În Sistemul Internațional, unitatea fundamentală pentru timp este:

a) minutul b) ora c) secunda d) milisecunda

4. Pentru o riglă gradată din milimetru în milimetru, eroarea instrumentală se estimează, de regulă, la:

a) ± 1 mm b) ± 0,5 mm c) ± 0,1 mm d) ± 10 mm

Subiectul II – *Pentru fiecare item se acordă 1 p.* **2p**

Completează spațiile libere.

5. Măsurarea directă înseamnă compararea unei mărimi fizice cu o mărime de aceeași natură, aleasă ca ... .

6. Rezultatul măsurării mărimii fizice se poate scrie sub forma $x = \overline{x} \pm \overline{\Delta x}$, unde $\overline{\Delta x}$ reprezintă ... .

Subiectul III – *Pentru fiecare item se acordă 1 p.* **2p**

Argumentează răspunsul, folosind noțiunile studiate.

7. Andrei măsoară temperatura apei cu două termometre. Termometrul *A* indică valori foarte apropiate la citiri repetate, dar toate sunt cu aproximativ 3°C mai mari decât temperatura reală. Termometrul *B* indică valori care oscilează mult de la o citire la alta, dar media lor este apropiată de temperatura reală. Explică, în 3-5 rânduri, care termometru este mai precis și care este mai exact.

8. Ana citește indicația unui dinamometru privind oblic scala aparatului, iar George o citește privind perpendicular pe scală. Ce tip de eroare poate apărea în primul caz? Explică de ce modul de citire influențează rezultatul măsurării.

Subiectul IV – *Pentru fiecare item se acordă 1 p.* **3p**

9. Victor măsoară volumul unui corp și obține următoarele valori:

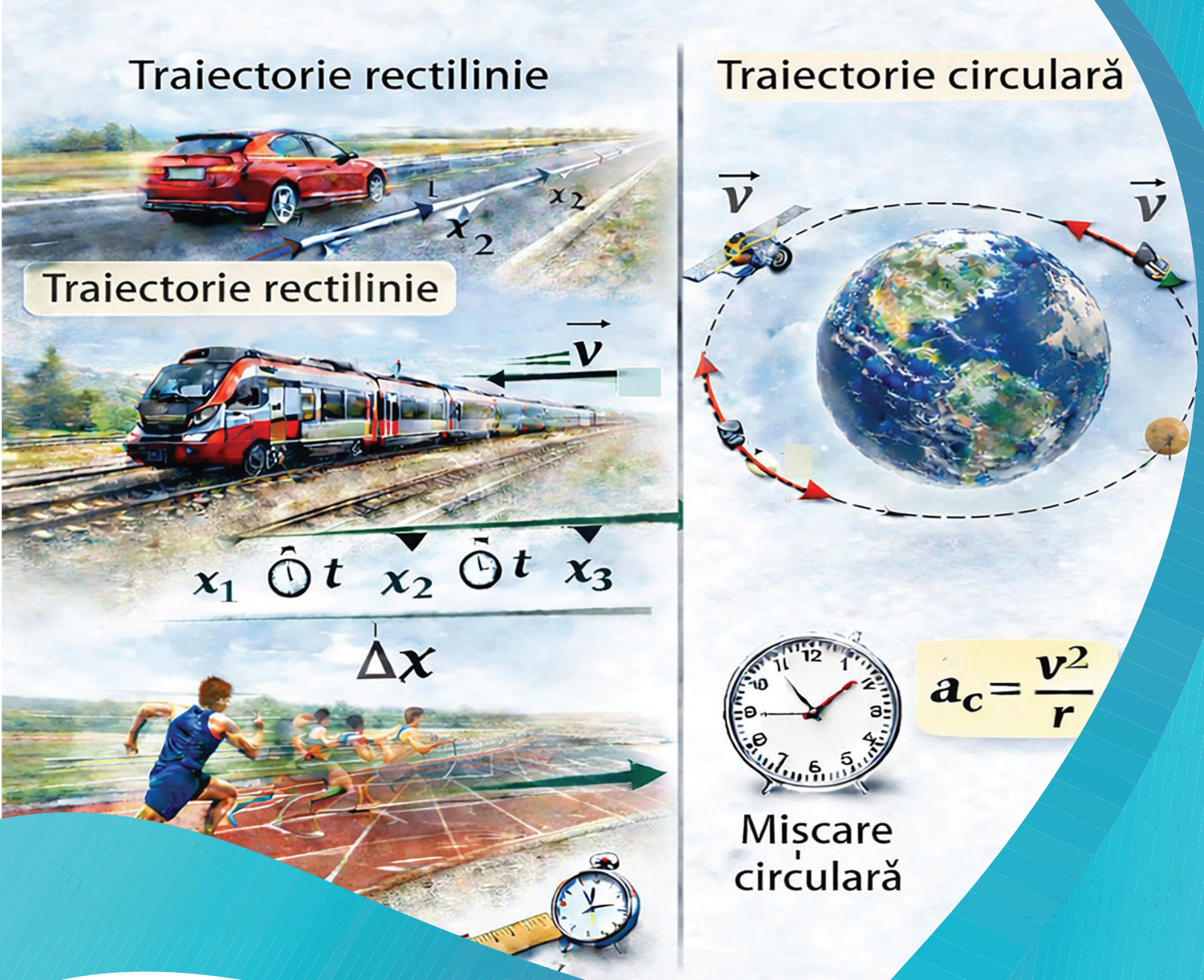
Nr. măsurării	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
V (cm³)	23,6	23,8	23,7	26,6	23,5	23,8

a) Identifică valoarea care poate fi considerată eroare grosolană.

b) Calculează valoarea medie a volumului și incertitudinea medie de măsurare.

c) Scrie rezultatul măsurării.

Notă: Timp de lucru: 50 min. Se acordă 1 punct din oficiu.



La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să înțelegi și să explici conceptul de punct material și condițiile în care un corp poate fi considerat punct material;
- să descrii mișcările rectilinie uniformă, rectilinie uniform variată și circulară uniformă și să compari/clasifici diferite tipuri de mișcare în funcție de forma traiectoriei și/sau de variația vectorilor viteză și accelerație;
- să identifici tipuri de mișcare în natură și în aplicații tehnice;
- să reprezinți și să interpretezi fizic graficele mișcării (dependența coordonatei sau a vitezei de timp);
- să determini experimental viteza medie a unui corp folosind instrumente simple de măsură;
- să înregistrezi, organizezi și reprezinți grafic date experimentale;
- să analizezi critic precizia măsurătorilor și regularitățile observate în datele experimentale;
- să aplici relațiile matematice și legile studiate în rezolvarea problemelor de cinematică.

Capitolul 2
Elemente de cinematică

2.1. Descrierea mișcării corpurilor

Când călătorești așezat pe bancheta unui autoturism, ești în repaus sau în mișcare? Dar astronautul care conduce o navetă spațială spre Stația Spațială Internațională este în repaus sau în mișcare?

Despre **repaus și mișcare,** deci despre deplasarea unui corp, se poate vorbi numai **în raport cu alte corpuri**, pentru că putem vorbi despre poziția unui corp doar în raport cu alte corpuri.

Reține

Numim **sistem de referință** ansamblul format dintr-un corp de referință față de care descriem mișcarea și/sau repausul altui corp, o riglă și un ceasornic.

Unui corp de referință i se atașează un sistem de trei axe (de preferat ortogonale) pentru a indica poziția în spațiu.

Un corp este în repaus dacă nu-şi modifică poziţia faţă de sistemul de referinţă şi este în mişcare dacă îşi modifică poziţia faţă de sistemul de referinţă ales.

Mișcarea unui corp poate arăta diferit în sisteme de referință diferite. De exemplu, astronautul este în repaus raportat la naveta spațială, aleasă ca sistem de referință, dar se află în mișcare dacă sistemul de referință ales este Pământul. În sistemul de referință propriu (sistemul de referință legat rigid de corp), corpul este întotdeauna în repaus. Pământul, Soarele etc. pot fi considerate sisteme de referință. Practic, orice corp căruia i se asociază un sistem de axe pentru măsurarea poziției și un ceasornic pentru măsurarea timpului poate fi considerat sistem de referință, însă este de preferat ca acesta să fie ales astfel încât descrierea mișcării să fie cât mai simplă.

În general, corpurile sunt sisteme complexe. De aceea, în studiul mișcării corpurilor folosim simplificări.

Dacă dimensiunile și forma unui corp pot fi neglijate în raport cu scara fenomenului studiat, se poate reduce corpul la un model fizic, numit **punct material**. În cadrul acestui model, întreaga masă a corpului este concentrată în acest punct.

Numim **mobil** punctul material aflat în mișcare. Mobilul aflat în mișcare trece printr-o succesiune de puncte.

Reține

Numim **traiectorie** locul geometric al tuturor punctelor prin care trece mobilul în mișcarea sa.

Să considerăm un sistem de referință solidar cu Pământul (fig. 2.1.1), numit **sistemul de referință al laboratorului (SL).** În acest sistem de referință, în intervalul de timp Δt, mobilul se deplasează din punctul M în punctul N, descriind traiectoria **a cărei lungime măsurată în Sistemul Internațional în metri,** este s (vezi fig. 2.1.1).

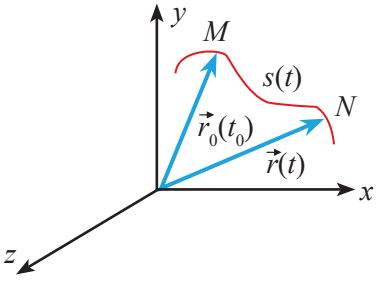


Fig. 2.1.1

Reține

Numim **vector de poziție** vectorul care indică poziția mobilului la un moment dat, în raport cu originea sistemului de referință. În cazul nostru (fig. 2.1.1.), la momentul de timp t_0, vectorul care indică poziția mobilului față de originea sistemului de referință O, este $\vec{r}_0$. Mobilul se deplasează pe traiectoria marcată cu roșu, din punctul M în punctul N, în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$.

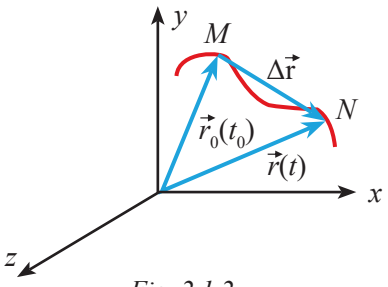


Fig. 2.1.2

La momentul de timp t, vectorul care indică poziția mobilului este $\vec{r}$.

Reține

Numim **vector deplasare vectorul:**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0(t_0) \quad (2.1.1)$$

Vectorul deplasare depinde de timp, dar nu depinde de forma traiectoriei (fig. 2.1.2).

Vectorul de poziție, ca și vectorul deplasare, are ca unitate de măsură, în sSistemul Internațional, metrul:

$$[\vec{r}]_{SI} = [\Delta\vec{r}]_{SI} = \text{m}$$

Mișcarea poate fi descrisă în funcție de lungimea traiectoriei, numită **distanța parcursă de mobil,** cu ajutorul **legii de mișcare** pe traiectorie:

$$S = f(t)$$

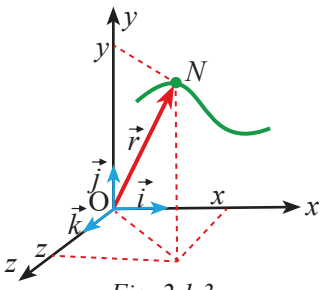


Fig. 2.1.3

Poziția mobilului poate fi exprimată fie în funcție de vectorul de poziție, fie în funcție de proiecțiile vectorului de poziție pe axele *Ox, Oy,* respectiv *Oz,* adică de coordonatele *x, y, z* (vezi fig. 2.1.3).

Dacă notăm versorii[1] celor trei axe de coordonate (vectorii unitate ai celor trei axe) cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, unde $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, putem exprima vectorul de poziție astfel:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (2.1.2)$$

PENTRU CURIOȘI:

Cum punctul material descrie o traiectorie continuă, bine determinată, și cum poziția mobilului variază în timp în mod continuu, coordonatele mobilului sunt funcții finite și continue de timp:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Ecuațiile 2.1.3 se numesc **ecuațiile parametrice** ale traiectoriei, în care parametrul este timpul.

În cazul **mișcării rectilinii** a unui mobil este convenabil să se aleagă una dintre axe, de exemplu, *Ox*, de-a lungul direcției de mișcare. Lungimea vectorului deplasare al mobilului în intervalul de timp Δt este egală cu modulul variației coordonatei sale, așa cum se observă în fig. 2.1.4:

$$\left.\begin{aligned} |\Delta\vec{r}| &= |\Delta x| \\ |\Delta x| &= |x_f - x_0| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\Delta\vec{r}| = |x_f - x_0| \quad (2.1.4)$$

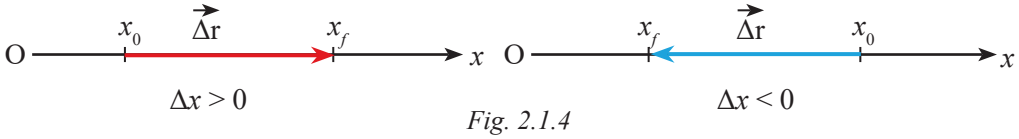


Fig. 2.1.4

În cazul în care **mișcarea se efectuează într-un plan *xOy*** (fig. 2.1.5), să stabilim ecuația traiectoriei înseamnă să stabilim o relație, între perechile de coordonate (*x, y*), ale punctelor prin care trece mobilul.

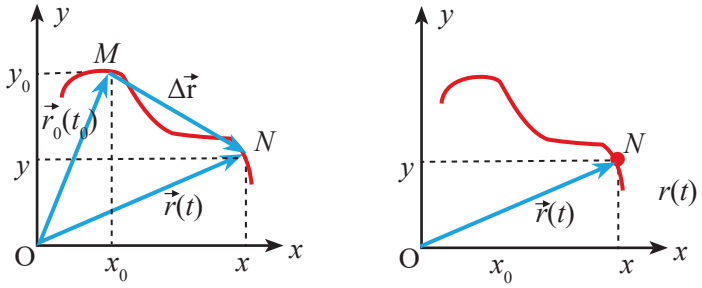


Fig. 2.1.5

[1] Fie un vector oarecare, $\vec{a}$, de modul $a \neq 0$. Versorul (vectorul unitate) asociat direcției acestuia se definește astfel: $\vec{v} = \frac{\vec{a}}{a}, v = 1$. Sensul pozitiv al axei coincide cu sensul versorului.

APLICĂ

1. Un mobil se deplasează din punctul de coordonate $(x_0, y_0, 0)$, în punctul de coordonate $(x_0, y, 0)$, ca în fig. 2.1.6., prima dată urmând traiectoria notată cu *a*, iar a doua oară urmând traiectoria notată cu *b*.

Ce relație de ordine există între lungimea traiectoriei și lungimea vectorului deplasare în cele două cazuri?

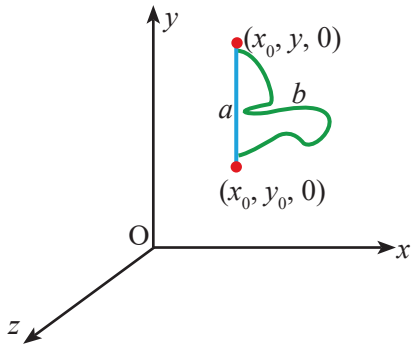


Fig. 2.1.6

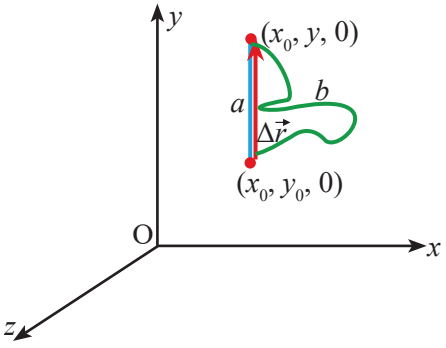


Fig. 2.1.7

Rezolvare: Se observă (vezi fig. 2.1.7) că, în primul caz (a), lungimea traiectoriei și lungimea vectorului deplasare sunt egale. În cazul al doilea (b), lungimea traiectoriei este mai mare decât lungimea vectorului deplasare (același ca în cazul a, chiar dacă forma traiectoriei este diferită).

2. Fie o mișcare în plan descrisă de legea (exprimată în unități SI):

$$\vec{r} = (3t-1)\vec{i} + 3t\vec{j}$$

a. Exprimă legile parametrice ale mișcării.
b. Reprezintă grafic traiectoria mobilului în coordonate *xOy*.
c. Calculează modulul vectorului deplasare în intervalul de timp (0 s, 2 s).
d. Calculează lungimea traiectoriei mobilului în intervalul considerat.

Rezolvare:

a. Vectorul de poziție poate fi exprimat în funcție de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ ai axelor *Ox*, respectiv *Oy*, conform ecuației:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

Prin identificare, găsim legile parametrice: $x = 3t - 1$, respectiv $y = 3t$, unde coeficienții 3 au ca unitate de măsură m/s, iar coeficientul 1 are ca unitate de măsură m.

b. Se observă ușor că din $x = f_1(t) = 3t - 1$, respectiv $y = f_2(t) = 3t$ (exprimate în unități SI), obținem ecuația traiectoriei, eliminând **parametrul** *t* (timpul) între cele două legi parametrice:

$$x = 3t-1 \Rightarrow 3t = x+1 \Rightarrow t = \frac{x+1}{3}, \text{ dar } y = 3t \Rightarrow y = 3\cdot\frac{x+1}{3} \Rightarrow y = x+1.$$

Deci traiectoria mobilului este liniară. Pentru a reprezenta grafic traiectoria mobilului, vom folosi, de exemplu, perechile de puncte ale căror coordonate sunt (x', y'), respectiv (x'', y''):

$$\left.\begin{matrix} x'=0 \\ y=x+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y' = 1, \text{ respectiv } \left.\begin{matrix} y''=0 \\ y=x+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$0 = x'' + 1 \Rightarrow x'' = -1.$$

Vom avea, deci, perechile de coordonate: $(x' = 0$ m, $y' = 1$ m) și $(x'' = -1$ m, $y'' = 0$ m), iar forma traiectoriei este liniară (fig. 2.1.8).

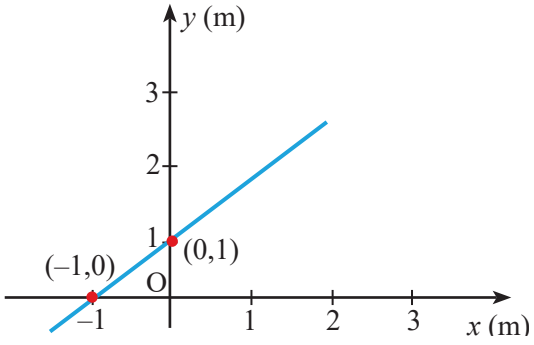


Fig. 2.1.8

c. Pentru a calcula modulul vectorului deplasare, să calculăm coordonatele mobilul la momentele de timp $t_1 = 0$ s, respectiv $t_2 = 2$ s:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3t - 1 \\ y &= 3t \\ t_1 &= 0\,\text{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (3\cdot 0 - 1)\,\text{m} = -1\,\text{m} \\ y_1 = (3\cdot 0)\,\text{m} = 0\,\text{m} \end{cases}, \text{ respectiv } \left.\begin{aligned} x &= 3t - 1 \\ y &= 3t \\ t_2 &= 2\,\text{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = (3\cdot 2 - 1)\,\text{m} = 5\,\text{m} \\ y_2 = (3\cdot 2)\,\text{m} = 6\,\text{m} \end{cases}, \text{ iar } [l]_{SI} = \text{m}.$$

Folosind reprezentarea din fig. 2.1.9, putem calcula modulul vectorului deplasare în intervalul de timp cerut de problemă astfel:

$$\left.\begin{aligned} |\Delta\vec{r}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ x_2 &= 3t_2 - 1 \\ x_1 &= 3t_1 - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(3t_2 - 1 - 3t_1 + 1)^2 + (3t_2 - 3t_1)^2}$$

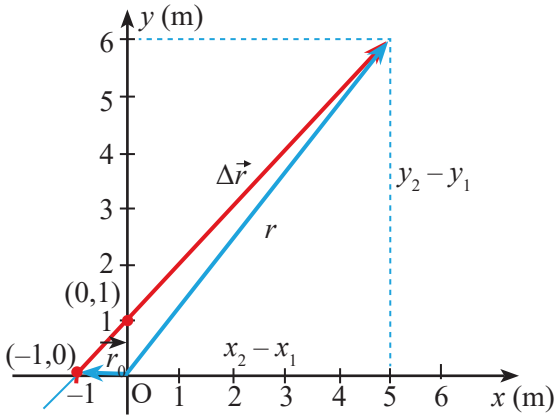


Fig. 2.1.9

Înlocuind valorile numerice și efectuând calculele, obținem:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(3\cdot 2 - 1 - 3\cdot 0 + 1)^2 + (3\cdot 2 - 3\cdot 0)^2}\ \text{m} = 6\sqrt{2}\ \text{m}$$

d. Observăm că lungimea traiectoriei în intervalul de timp considerat coincide cu modulul vectorului deplasare în același interval.

Deci: $s = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(3\cdot 2 - 1 - 3\cdot 0 + 1)^2 + (3\cdot 2 - 3\cdot 0)^2}\ \text{m} = 6\sqrt{2}\ \text{m}$.

EXPERIMENTEAZĂ

„Fixează" într-unul dintre colțurile clasei originea unui sistem de axe ortogonal, tridimensional, astfel:

- alege axa ***Ox*** în plan orizontal, de-a lungul peretelui pe care se află tabla;
- alege axa ***Oy*** verticală, orientată în sus;
- alege axa ***Oz*** în plan orizontal (de preferat planul podelei), de-a lungul peretelui perpendicular pe peretele care conține tabla (vezi fig. 2.1.10).

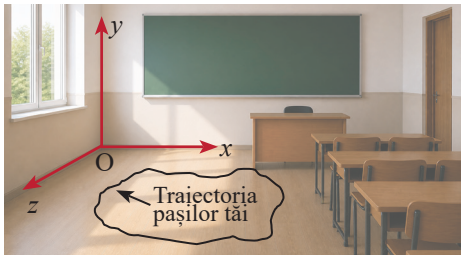


Fig. 2.1.10

Poți observa că:

- deplasarea ta în planul ***xOy*** nu este posibilă (necesită deplasare pe verticală);
- deplasarea în planul ***xOz*** este posibilă, deoarece se face pe podea.

Atașează celor trei axe un sistem de *unități arbitrare de lungime.*

Deplasează-te în sistemul de coordonate ales, din poziția inițială având coordonatele (7, 0, 6) (în unități arbitrare), astfel încât *vectorul deplasare să fie nul, iar lungimea traiectoriei* (*distanța parcursă*), *nenulă.*

Răspunde la următoarele întrebări:

a. Ce coordonate vei avea în poziția finală?

b. Ce particularitate observi, legată de forma traiectoriei: este închisă sau deschisă?

Notează în caiet răspunsurile la întrebările de mai sus.

2.2. Viteza și accelerația

Cum putem compara mișcările între ele? De exemplu, ce se mișcă mai repede, un camion care parcurge o distanță $d_1 = 50$ m într-un minut sau un automobil care parcurge distanța $d_2 = 100$ m în 3 minute?

Pentru a compara mișcările, avem nevoie de o mărime care să permită o corelație între deplasări și durate. Această mărime fizică se numește **viteză**. Inițial, vom introduce această mărime ca pe o mărime fizică scalară urmând ca, mai apoi, să o generalizăm la o mărime fizică vectorială.

Reține

Viteza medie a unui mobil care a parcurs o porțiune de traiectorie de lungime Δs (fig. 2.2.1) în intervalul de timp Δt se definește prin raportul:

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.2.1)$$

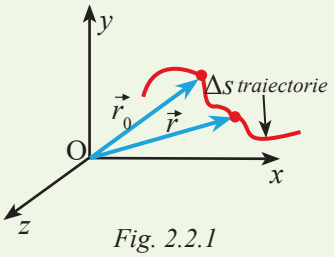


Fig. 2.2.1

Să presupunem că mobilul are, la momentul de timp inițial t_0, vectorul de poziție $\vec{r}_0$, iar la momentul de timp t are vectorul de poziție $\vec{r}$. Deplasarea mobilului în timp este caracterizată de vectorul viteză medie.

Reține

Vectorul viteză medie a unui mobil se definește prin raportul:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \quad (2.2.2)$$

unde $\Delta \vec{r}$ reprezintă vectorul deplasare, iar Δt este intervalul de timp în care a avut loc deplasarea respectivă (fig. 2.2.2.).

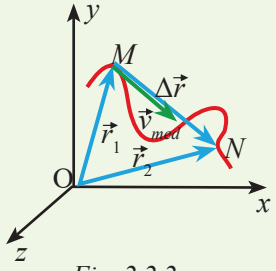


Fig. 2.2.2

Unitatea de măsură în Sistemul Internațional pentru viteză este: $[v]_{SI} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (2.2.3)

Cum duratele sunt totdeauna pozitive, înseamnă că vectorul viteză medie are aceeași orientare (aceeași direcție și același sens) cu vectorul deplasare. Deci **vectorul viteză medie este secant** la traiectorie (fig. 2.2.2).

Imaginează-ți că urmărești un biciclist pe traseu: vezi unde ajunge după cinci minute, dar nu știi exact cum a parcurs, de exemplu, fiecare porțiune a traseului. Viteza medie nu surprinde detaliile mișcării. Această mărime fizica ne spune doar ce s-a întâmplat „în ansamblu", fără a ne oferi informații referitoare la modul concret în care biciclistul nostru (mobilul) și-a schimbat poziția.

În multe situații practice însă, ne interesează să descriem poziția mobilului la fiecare moment de timp, adică să descriem pas cu pas modul în care se desfășoară mișcarea. Pentru aceasta, este necesar să extindem definiția vitezei medii pentru un interval de timp infinitezimal, corespunzător deplasării între două puncte ale traiectoriei (de exemplu: M și N), oricât de apropiate între ele.

Reține

Vectorul viteză instantanee se obține când intervalul de timp $\Delta t \longrightarrow 0$.

În acest caz, punctul N de pe traiectorie se apropie oricât de mult de punctul M.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.2.4.)$$

unde $d\vec{r}$ este un vector deplasare infinitezimal (foarte mic).

Prin trecerea la limită, secanta MN se rotește în jurul punctului M și devine tangentă la traiectorie (în acest moment, practic, punctele M și N tind să se confunde) (fig. 2.2.3).

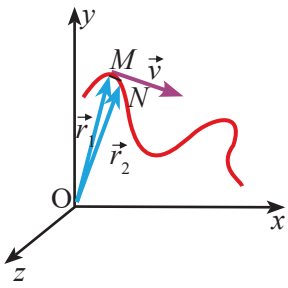


Fig. 2.2.3

Reține

Vectorul viteză instantanee este tangent la traiectorie în punctul considerat și este orientat în sensul mișcării mobilului în acel moment.

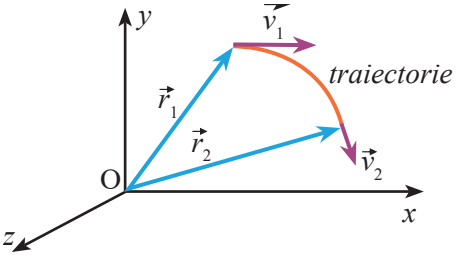


Fig. 2.2.4

În fig. 2.2.4. am ilustrat traiectoria unui mobil, vectorii de poziție ai mobilului, $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ la două momente de timp date, precum și vectorii viteză instantanee, $\vec{v}_1$, respectiv $\vec{v}_2$, tangenți la traiectorie la momentele de timp considerate.

Dacă mișcarea este **unidimensională (mișcare rectilinie)**, atât vectorul viteză medie, cât și vectorul viteză instantanee sunt situați pe axa mișcării (fig. 2.2.5.).

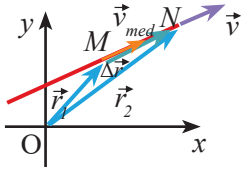


Fig. 2.2.5

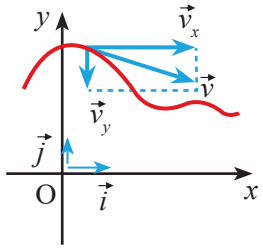


Fig. 2.2.6

Dacă mișcarea se face într-un plan, vectorul viteză instantanee este rezultanta componentelor vitezei pe cele două axe ale mișcării, de exemplu (vezi fig. 2.2.6.): $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Conceptul de viteză poate fi extins pentru a descrie *variația în timp a oricărei mărimi fizice* care caracterizează starea unui sistem fizic. Un prim exemplu este să studiem modul în care însăși **viteza se modifică în timp**, adică să studiem *viteza de variație a vitezei*.

Reține

Mărimea fizică vectorială ce caracterizează variația vectorului viteză în timp se numește **accelerație**.

De exemplu, dacă ne imaginăm o mașină care pornește de la semafor, observăm că, în prima secundă de la pornire, viteza sa este mică, dar crește pe măsură ce timpul trece. În general, vectorul viteză al unui mobil poate varia atât ca modul, cât și ca orientare, iar orice astfel de variație implică existența unei accelerații.

Reține

Vectorul accelerație este **măsura variației vectorului viteză** în unitatea de timp.

Ca și în cazul vitezei, putem defini vectorul accelerație medie, respectiv vectorul accelerație instantanee.

$$\vec{a}_{med} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Vectorul accelerație medie este orientat în sensul și pe direcția vectorului variație a vitezei (fig. 2.2.7.).

Unitatea de măsură pentru accelerație este:

$$[a]_{SI} = \frac{[v]_{SI}}{[t]_{SI}} = \frac{ms^{-1}}{s} = ms^{-2}$$

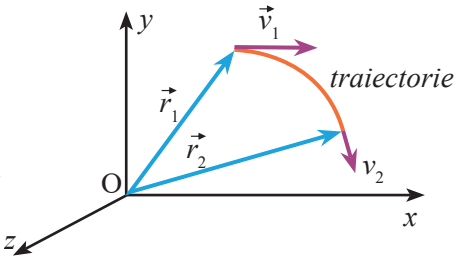


Fig. 2.2.7

Reține

Vectorul accelerație instantanee caracterizează variația vectorului viteză într-un interval de timp foarte, foarte scurt (infinitezimal):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

unde $d\vec{v}$ este o variație foarte mică a vectorului viteză.

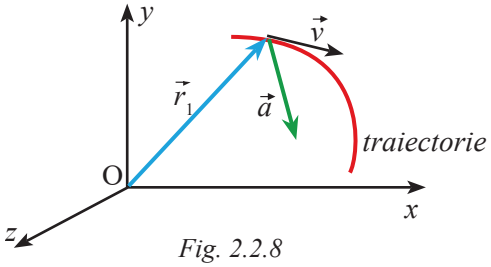


Fig. 2.2.8

În timp ce viteza instantanee este întotdeauna tangentă la traiectorie și are sensul mișcării, într-o mișcare curbilinie, vectorul accelerație instantanee este întotdeauna orientat spre interiorul traiectoriei (spre partea concavă, adică partea spre care se rotește vectorul viteză instantanee) (fig. 2.2.8.).

APLICĂ

1. Acul minutar al unui ceas are lungimea $l = 2{,}5$ cm.

a. Care este valoarea vitezei medii scalare a vârfului acului atunci când se deplasează între două puncte diametral opuse ale cadranului?

b. Care este valoarea modulului vectorului viteză medie în cazul în care minutarul se deplasează între aceleași puncte diametral opuse ale cadranului?

Rezolvare:

a. În intervalul de timp $\Delta t = t_1 - t_0 = 30$ min, vârful minutarului de lungime $l = 2{,}5$ cm „parcurge” un arc de cerc Δs (fig. 2.2.9.):

$$\left.\begin{aligned} \Delta s &= \frac{2\pi R}{2} \\ R &= l \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta s = \pi l \ (2.2.5.)$$

Pentru simplificare figurii, vom folosi un referențial bidimensional:

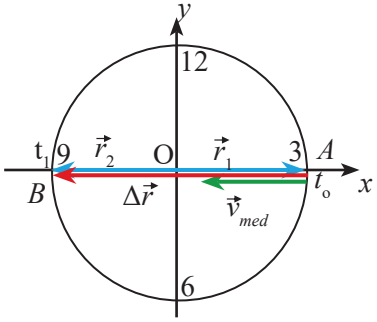


Fig. 2.2.9

Calculăm viteza medie (scalară):

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi l}{\Delta t} \ (2.2.6.)$$

Înlocuind valorile numerice și efectuând calculele, obținem:

$$v_{med} = \frac{\pi l}{\Delta t} = \frac{3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}}{30 \cdot 60}\,\frac{m}{s} \cong 0{,}44 \cdot 10^{-4}\,\frac{m}{s} \qquad (2.2.7.)$$

b. Modulul deplasării vârfului acului între două puncte diametral opuse este (fig. 2.2.5.):

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = 2l \quad (2.2.8.)$$

Calculăm modulul vectorului viteză medie:

$$\left|\vec{v}_{med}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t} = \frac{5\cdot10^{-2}}{30\cdot60} \cong 0,28\cdot10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.2.9)$$

2. Fie o mișcare în plan descrisă de legea (în unități SI): $\vec{r}(t) = 2\vec{i} + t^2\vec{j}$.

a. Ce formă are traiectoria?

b. Calculează modulul vectorului viteză la momentul de timp $t = 2$ s.

Rezolvare:

Reamintim faptul că fiecare coeficient care apare (explicit sau nu) într-o lege trebuie să aibă unități de măsură adecvate. De pildă, coeficientul „2“ din enunț nu este un simplu număr, ci în mod evident înseamnă 2 m. Tot astfel, chiar dacă în fața lui t^2 nu apare niciun coeficient, este clar că nu putem avea o coordonată spațială exprimată în s^2! Prin urmare, acolo avem în mod necesar un coeficient implicit, egal cu 1 ms^{-2}.

a. Observăm că mișcarea se face în planul xOy. Legile parametrice al mișcării sunt $x = 2$ m, respectiv $y = t^2$ m

Întrucât coordonata x este o simplă constantă, traiectoria mobilului este rectilinie, și anume o dreaptă paralelă cu axa Oy.

b. Calculăm componente vitezei, v_x și v_y, în acord cu definiția vitezei momentane. Pentru aceasta, considerăm două momente de timp t_1 și t_2 oricât de apropiate între ele. Componentele corespunzătoare x și y ale poziției vor fi $x_1 = 2$ m și $y_1 = t_1^2$, respectiv $x_2 = 2$ m și $y_2 = t_2^2$.

Efectuând înlocuirile numerice, obținem rezultatele următoare.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{2\,\text{m} - 2\,\text{m}}{t_2 - t_1} = \frac{0\,\text{m}}{t_2 - t_1} = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} = t_2 + t_1 \quad (2.2.10)$$

Cum cele două momente de timp sunt oricât de apropiate între ele, le putem nota în mod generic cu „t“ pe ambele $v_y = 2t$ (2.2.11).

Vectorul viteză are doar componentă pe axa Oy. Subliniem încă o dată, coeficientul „2“ care apare nu este un simplu număr, ci trebuie să aibă aici unitate de m/s^2. Coordonata mobilului pe axa Ox nu se modifică, deci componenta vitezei pe această axă este nulă:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ &v_x = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &v_y = 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v} = 2t\vec{j} \qquad (2.2.12)$$

La momentul de timp $t = 2$ s, modulul vectorului viteză are valoarea: $v = \left|v_y\right| = 2\cdot2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3. În graficul din fig. 2.2.10 este reprezentată dependența de timp a vitezei unui bungee jumper (săritor cu coarda elastică).

Răspunde la următoarele întrebări:

a. În care dintre punctele *P*, *Q*, *R*, săritorul se află în repaus?

b. În care dintre punctele *P*, *Q*, *R*, accelerația săritorului este zero?

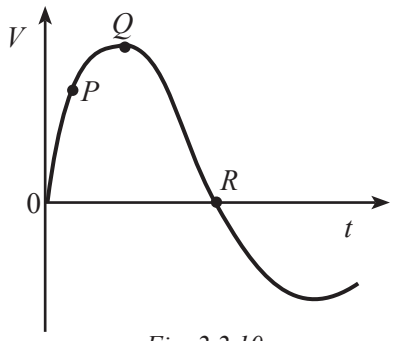


Fig. 2.2.10

	Săritor în repaus	Accelerație zero
A	*Q*	*P*
B	*Q*	*R*
C	*R*	*Q*
D	*R*	*R*

Rezolvare:

a. Din grafic se observă că în punctul *R* viteza săritorului este zero deci în acel moment săritorul este în repaus.

b. În punctul *Q*, viteza săritorului atinge o valoare maximă; trecând de la o mișcare accelerată la una încetinită, variația instantanee a vitezei în acest punct de extrem este zero, ceea ce înseamnă că accelerația devine nulă. (răspuns C).

EXPERIMENTEAZĂ

„Fixează” într-unul dintre colțurile clasei originea unui sistem de axe ortogonal tridimensional, astfel:

1. alege axa ***Ox*** în plan orizontal, de-a lungul peretelui pe care se află tabla;
2. alege axa ***Oy*** verticală, orientată în sus;
3. alege axa ***Oz*** în plan orizontal (de preferat planul podelei), de-a lungul peretelui perpendicular pe peretele care conține tabla (vezi fig. 2.1.11)

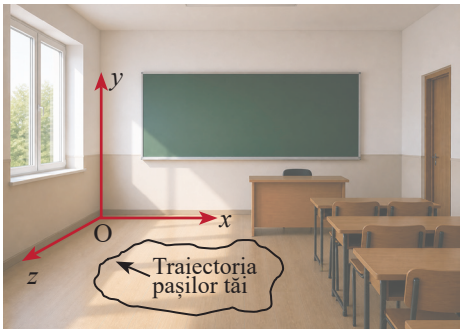


Fig. 2.1.11

Atașează celor trei axe un sistem de *unități arbitrare de lungime.*

Deplasează-te în sistemul de coordonate ales, pe o traiectorie curbilinie oarecare, din punctul de coordonate (0, 0, 0) considerat poziția inițială, în punctul de coordonate (7, 0, 6), poziția finală, astfel încât să poți măsura atât lungimea traiectoriei, cât și deplasarea.

Măsoară cu ajutorul unui cronometru **timpul** cât durează mișcarea**.**

Notează în caiet următoarele date: lungimea traiectoriei, modulul vectorului deplasare, timpul cât durează mișcarea.

Calculează:

a. viteza medie scalară;

b. modulul vectorului viteză medie;

Notează în caiet răspunsurile la cerințele de mai sus.

2.3. Tipuri de mișcări

Mișcarea unui mobil poate descrie în spațiu o traiectorie complicată. Clasificarea mișcării punctului material după forma traiectoriei și după modul în care variază vectorul viteză ne ajută să înțelegem și să modelăm mai ușor, din punct de vedere matematic, mișcarea corpurilor din natură.

În funcție de **forma traiectoriei,** putem clasifica mișcarea punctului material (fig. 2.3.1) în **mișcare rectilinie** (traiectoria este o dreaptă) și **mișcare curbilinie** (traiectoria este o curbă închisă sau deschisă).

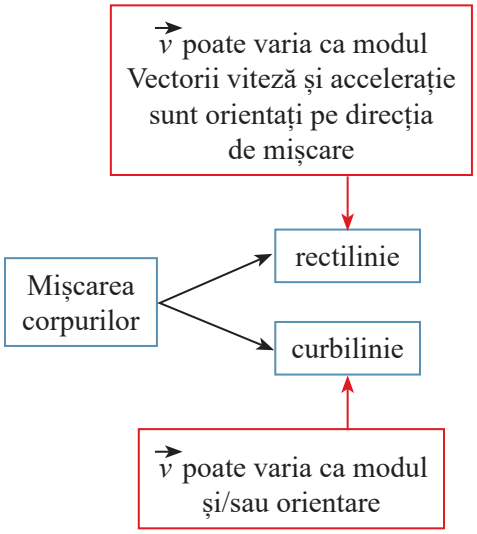


Fig. 2.3.1

Viteza unui mobil este **mărime fizică vectorială**, deci poate varia atât ca modul, cât și ca orientare. Să studiem, de exemplu, mișcarea unui automobil care merge pe un drum cu serpentine. Din lecțiile anterioare, știm că viteza instantanee este tot timpul tangentă la traiectoria descrisă de automobil. Când automobilul frânează la curbe, vectorul viteză își modifică atât **modulul** (scade), cât și **orientarea**, datorită schimbării direcției de deplasare.

Cum orice variație a vectorului viteză presupune existența unei accelerații, înseamnă că putem vorbi de o **accelerație tangențială**, măsura variației în timp a vectorului viteză ca modul și de o **accelerație normală**, măsura variației în timp a vectorului viteză ca orientare:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \qquad (2.3.1)$$

Vectorul **accelerație tangențială** este **orientat pe direcția** vectorului viteză, tangent la traiectorie, iar vectorul **accelerație normală** este **orientat perpendicular** pe direcția vectorului viteză (fig. 2.3.2)

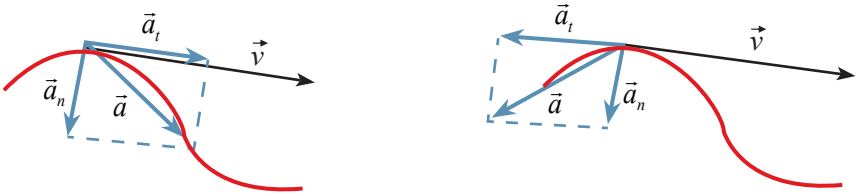


Fig. 2.3.2

Un tren care se deplasează pe o porțiune dreaptă de cale ferată, un ascensor care urcă sau coboară, ori o rachetă lansată vertical sunt exemple de mobile care, într-un sistem de referință legat solidar de Pământ, descriu traiectorii rectilinii.

În **mișcarea rectilinie**, vectorul viteză nu variază ca orientare, deci **accelerația normală este nulă.** Acele unui ceasornic (de exemplu, minutarul) descriu, în sistemul de referință al cadranului, o traiectorie circulară, în care vectorul viteză nu variază ca modul, dar **variază ca orientare**. Prin urmare, acele ceasornicului au **accelerație normală**. Planetele se mișcă în jurul Soarelui pe traiectorii curbilinii închise. În sistemul de referința legat de Soare, vectorul viteză al unei planete variază atât **ca modul**, cât și **ca orientare**, deci planeta are atât **accelerație tangențială**, cât și **accelerație normală.**

De exemplu, în sistemul de referință legat de Soare, vectorul viteză al Pământului (reprezentat în fig. 2.3.3) se modifică în timp:

- ca orientare, deoarece direcția mișcării se schimbă continuu pe orbită;
- ca modul, deoarece viteza Pământului nu este constantă; ea este mai mare în apropierea Soarelui (la periheliu) și mai mică la distanță maximă (la afeliu).

Prin urmare, Pământul, în mișcarea lui față de Soare, are atât accelerație tangențială, cât și accelerație normală. (Reprezentarea corpurilor cerești nu este la scară.)

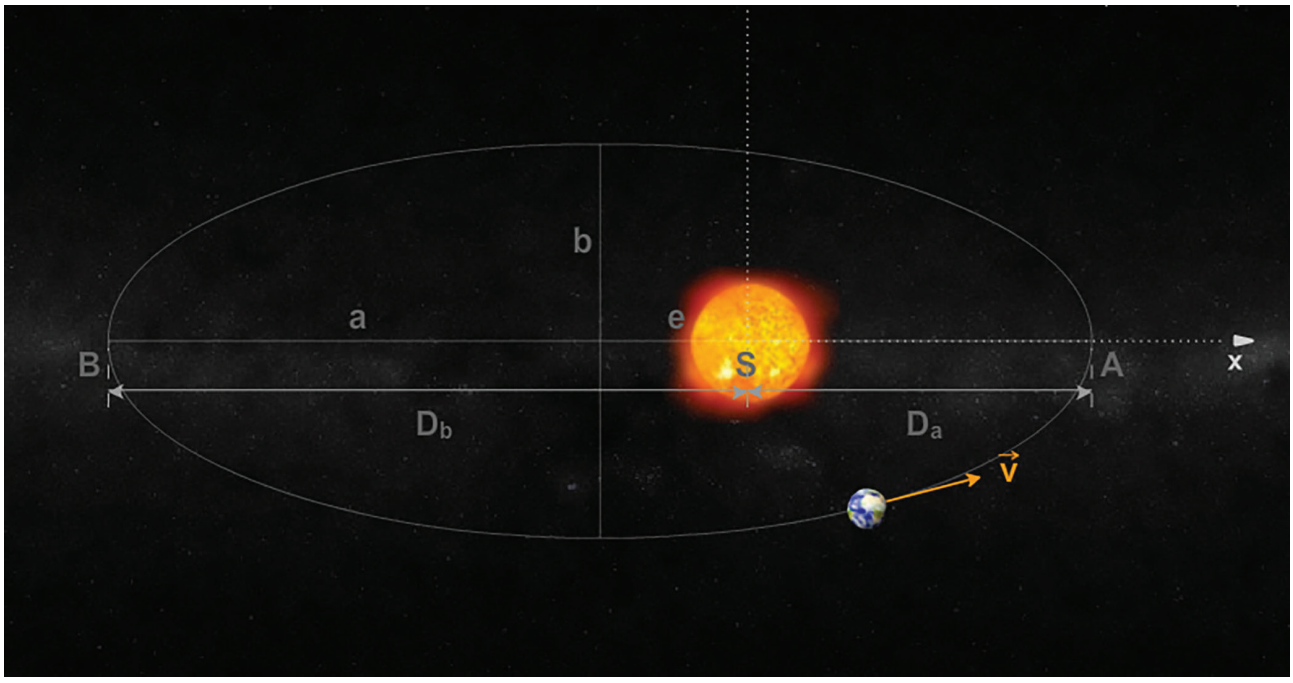


Fig. 2.3.3

În funcție de variația modulului vectorului viteză, mișcările pot fi clasificate în mișcări **uniforme** și mișcări **variate,** așa cum este ilustrat în diagrama 2.3.4.

În mișcarea **uniformă** (rectilinie sau curbilinie), **modulul vectorului** viteza **rămâne constant** în timpul mișcării. În mișcarea variată, modulul vectorului viteză se modifică în timp.

În mișcarea uniform variată, rectilinie sau curbilinie, **modulul vectorului accelerație tangențială rămâne constant.**

În mișcarea **rectilinie și uniformă** a unui mobil, **vectorul accelerație este nul** (viteza nu se modifică nici ca modul, nici ca orientare).

În diagrama 2.3.4 este ilustrată o clasificare a mișcărilor corpurilor.

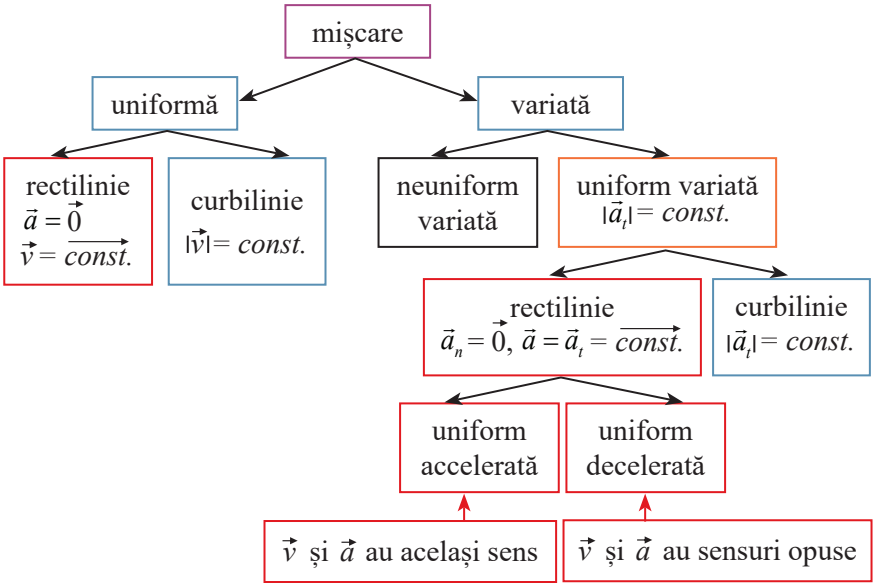


Fig. 2.3.4

PENTRU CURIOȘI:

În diagrama 2.3.5 este prezentată o clasificare detaliată a mișcărilor unui punct material.

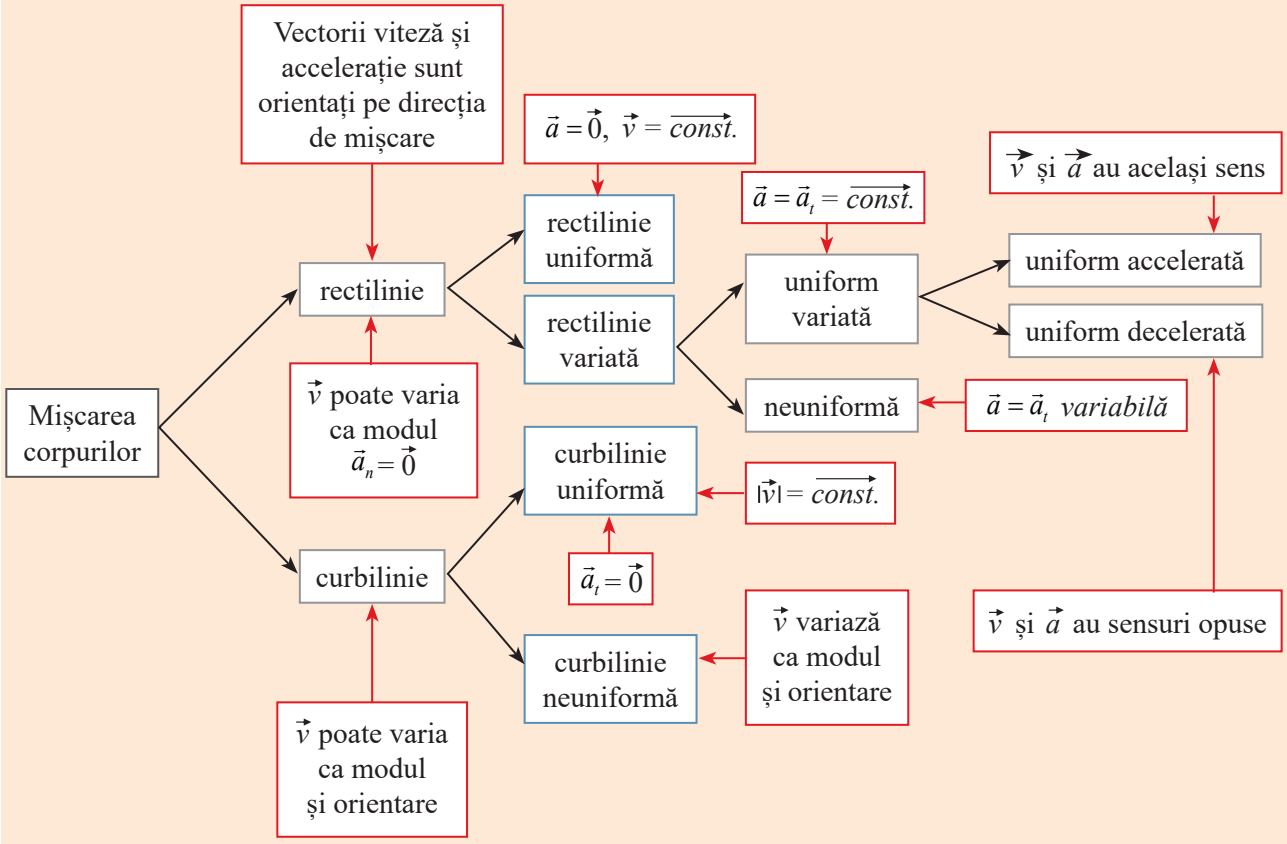


Fig. 2.3.5

2.3.1. Mișcarea rectilinie uniformă

Există situații în natură în care mișcarea unui corp se desfășoară într-un mod previzibil. De exemplu, o barcă purtată liber la vale de curentul unui râu își modifică poziția în timp în mod uniform față de un sistem de referință legat de mal. Sau când mergi cu mașina pe o autostradă dreaptă, iar vitezometrul indică tot timpul 90 km/h. Nu accelerezi, nu frânezi. În fiecare secundă, parcurgi aceeași distanță. Fără să îți dai seama, experimentezi una dintre cele mai simple și importante forme de mișcare din fizică: ***mișcarea rectilinie uniformă****. Putem afla legea de mișcare a unui astfel de corp? Cu siguranță, dacă știm viteza corpului și poziția lui la un moment de timp dat (de exemplu, momentul inițial al mișcării), așa cum vei descoperi în această lecție.*

Dacă traiectoria descrisă de un corp aflat în mișcare este **rectilinie**, înseamnă că viteza nu își schimbă orientarea, deci nu **există accelerație normală.** Dacă mișcarea corpului este **uniformă**, înseamnă că **viteza nu își modifică valoarea, deci nu avem accelerație tangențială.** Deci, în mișcarea rectilinie uniformă, vectorul **accelerație este nul,** ceea ce este echivalent cu afirmația că **vectorul viteză al mobilului este constant în timp**.

Reține

În mișcarea **rectilinie uniformă**, **vectorul accelerație este nul,** iar **vectorul viteză este constant în timp**:

$$\vec{a} = \vec{0}, \vec{v} = \overrightarrow{\text{constant}}$$

Viteza medie pe un interval de timp oarecare coincide cu viteza instantanee a corpului.

Dacă se cunoaște $\vec{r}_0$ vectorul de poziție al mobilului la un moment de timp t_0, condiția de mai sus se poate scrie în felul următor:

$$\vec{v}_{med} = \vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0) \quad (2.3.2)$$

Relația 2.3.2 reprezintă **legea de mișcare** a unui mobil aflat în mișcare rectilinie uniformă.

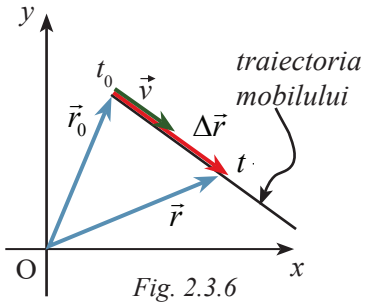


Fig. 2.3.6

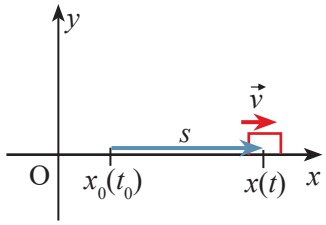


Fig. 2.3.7

În fig. 2.3.6, am reprezentat traiectoria mobilului în sistemul de coordonate *xOy*, vectorii de poziție la momentul de timp inițial și la un alt moment de timp oarecare, vectorul deplasare (ce coincide cu traiectoria mobilului între momentele de timp considerate), precum și vectorul viteză.

PENTRU CURIOȘI:

Legea vectorială (2.3.2) reprezintă, de fapt, trei legi de mișcare scalare, pe cele trei axe în spațiu. Lucrurile pot fi simplificate dacă se alege un sistem de referință astfel încât una dintre axe, de pildă *Ox*, să coincidă cu direcția deplasării:

$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0) \quad (2.3.3)$$

Se observă că, în mișcarea rectilinie uniformă, coordonata mobilului **variază liniar în timp** (legea de mișcare este un **polinom de gradul 1 în timp**).

În cazul în care condițiile inițiale x_0 și t_0 nu sunt precizate în mod explicit, ele pot fi alese din motive de simplitate **ca având valori nule**.

$$x(t) = v_x t \quad (2.3.4)$$

Reține

În legea de mișcare 2.3.3, *x* nu reprezintă spațiul parcurs de mobil, ci **coordonata mobilului la momentul de timp *t*,** măsurată față de originea sistemului de axe considerat, așa cum poți observa în diagrama 2.3.7.

În figurile 2.3.8. și 2.3.9, am reprezentat grafic dependențele de timp ale accelerației, vitezei și, respectiv, coordonatei unui mobil aflat în mișcare rectilinie uniformă.

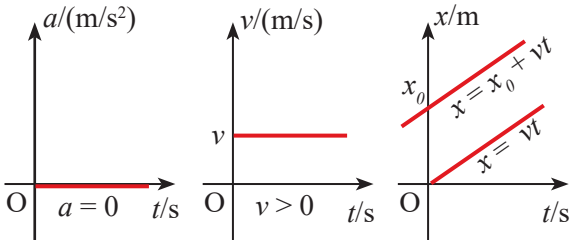


Fig. 2.3.8

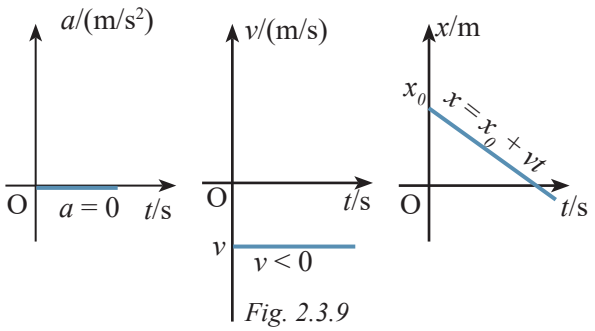


Fig. 2.3.9

Reține

Coordonata mobilului, în mișcarea rectilinie uniformă**, variază liniar în timp**.

Dacă mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei *Ox*, așa cum este figurat în diagrama 2.3.7, viteza este pozitivă (vezi fig. 2.3.8), iar dacă mobilul se deplasează în sens opus axei considerate, viteza este negativă (vezi fig. 2.3.9).

APLICĂ

1. Un automobil se deplasează cu o viteza constantă v_1 de-a lungul axei *Ox* într-un anumit interval de timp și, în continuare, cu o altă viteză constantă v_2, într-un interval de timp egal cu primul. Care este viteza medie a automobilului?

Rezolvare:

Putem considera trei mișcări rectilinii uniforme: cele două menționate în enunț și cea echivalentă referitoare la viteza medie. Deoarece în problemă nu se precizează nimic referitor la valorile condițiilor inițiale pentru prima mișcare, le putem considera nule. Pentru a doua mișcare, condițiile inițiale reprezintă, de fapt, condițiile finale de la prima mișcare.

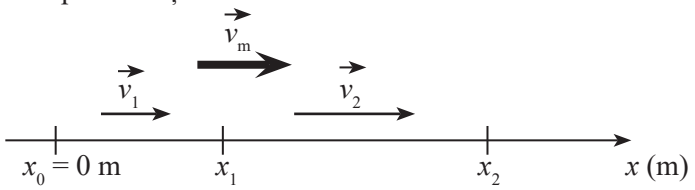


Fig. 2.3.10

Fie *t* momentul la care mobilul își modifică viteza. Aplicăm legea de mișcare rectilinie uniformă pentru fiecare din cele trei cazuri, scriind inclusiv termenii nuli, pentru a putea fi identificați în diagrama din fig. 2.3.10:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + v_1(t-0) \\ x_2 = x_1 + v_2(2t-t) \\ x_2 = 0 + v_m(2t-0) \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuații, obținem rezultatul următor:

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

2. O locomotivă face manevre într-o gară, deplasându-se pe o traiectorie rectilinie cu viteza constantă $v_{1x} = 36$ km/h. După intervalul de timp $\Delta t_1 = 3$ min de la momentul inițial, mecanicul locomotivei inversează brusc sensul de mișcare. Considerând neglijabil timpul cât face această manevră și considerând că mișcarea cu spatele se face cu viteza constantă $v_{2x} = -18$ km/h și durează $\Delta t_2 = 2$ min, calculează:

a. Spațiul total parcurs de locomotivă.

b. Deplasarea locomotivei în timpul total de mișcare.

c. Viteza medie (scalară) a locomotivei pe toată durata mișcării.

d. Modulul vectorului viteză medie pe toată durata mișcării.



Fig. 2.3.11

Rezolvare:

a. Transformăm unitățile de măsură în unități din SI:

$$v_{1x} = \frac{36 \cdot 1000}{3600} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad v_{2x} = -\frac{18 \cdot 1000}{3600} = -5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

respectiv $\Delta t_1 = 180$ s, $\Delta t_2 = 120$ s.

Figurăm pe o diagramă traiectoria locomotivei:

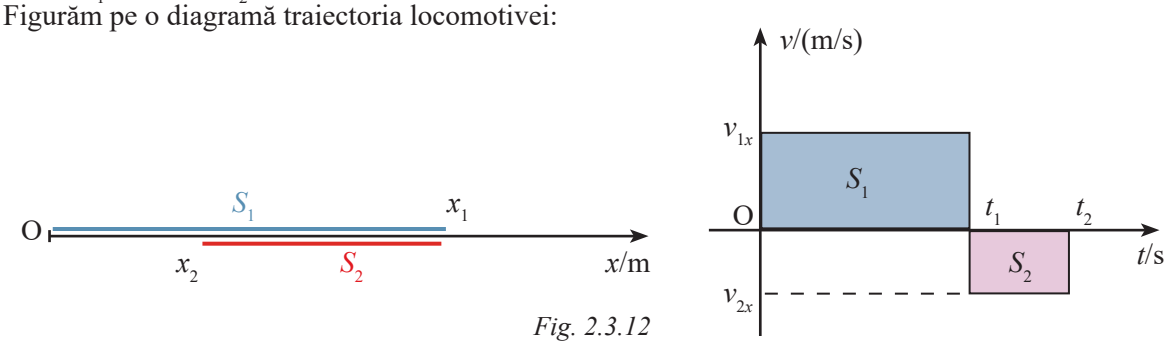


Fig. 2.3.12

Observăm că dacă reprezentăm grafic viteza mobilului în funcție de timp, ariile delimitate de graficul $v(t)$ și axa Ot ($t_0 = 0$) pentru intervalele de timp corespunzătoare reprezintă spațiul total parcurs de mobil. Pentru a-l calcula, este suficient să însumăm cele două arii indicate în reprezentarea grafică din fig. 2.3.12:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ s_1 &= v_{1x}(t_1 - t_0) = v_{1x} \cdot \Delta t_1 \\ s_2 &= |v_{2x}|(t_2 - t_1) = |v_{2x}| \cdot \Delta t_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s = v_{1x} \cdot \Delta t_1 + |v_{2x}| \cdot \Delta t_2$$

Efectuând calculele numerice, obținem: $s = (10 \cdot 180 + 5 \cdot 120)$ m $= 2400$ m $= 2{,}4$ km.

b. Pentru a calcula deplasarea locomotivei (coordonata finală x_2 față de originea O), **scădem cele două arii:**

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= s_1 - s_2 \\ s_1 &= v_{1x}(t_1 - t_0) = v_{1x} \cdot \Delta t_1 \\ s_2 &= |v_{2x}|(t_2 - t_1) = |v_{2x}| \cdot \Delta t_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = v_{1x} \cdot \Delta t_1 - |v_{2x}| \cdot \Delta t_2 = (1800 - 600)\text{ m} = 1200\text{ m}.$$

c. $v_{med} = \dfrac{s}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{v_{1x} \cdot \Delta t_1 + |v_{2x}| \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{2400}{300}\text{ m/s} = 8\text{ m/s}$

d. $|\vec{v}_{med}| = \dfrac{x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{v_{1x} \cdot \Delta t_1 + v_{2x} \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{1200}{300}\text{ m/s} = 4\text{ m/s}$

3. În graficul din fig. 2.3.13 este reprezentată dependența de timp a vitezei unui mobil care se deplasează pe o traiectorie rectilinie. Consideră că, în momentul inițial, mobilul se afla în originea sistemului de axe de coordonate.

a. Scrie legile de mișcare ale mobilului în cele două cazuri.

b. Calculează coordonata mobilului la momentul de timp $t = 7$ s.

c. Calculează spațiul parcurs de mobil în secunda a 3-a.

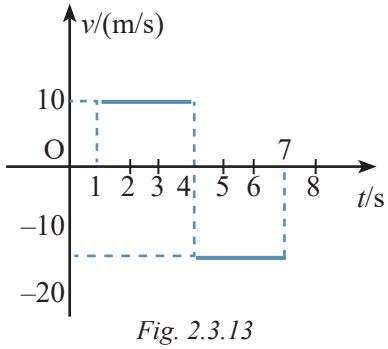


Fig. 2.3.13

Rezolvare:

a. Din grafic, observăm că:

$$t \in [1,4)\ \text{s} \Rightarrow v_1 = 10\ \text{m/s} \qquad t \in (4,7]\ \text{s} \Rightarrow v_2 = -15\ \text{m/s}$$

Pentru primul interval de timp:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{01} + v_1(t - t_{01}) \\ x_{01} &= 0\ \text{m} \\ t_{01} &= 1\ \text{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 10 \cdot (t-1)\ \text{m}$$

Observă că după $t_1 = 4\text{s}$, mobilul se află în punctul a cărui coordonată x_1 are valoarea:

$$\left.\begin{aligned} x &= 10 \cdot (t-1) \\ t &= t_1 = 4\ \text{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 10 \cdot (4-1)\ \text{m} = 30\ \text{m}$$

Cum în acest caz $x_{01} = 0$ m, înseamnă că această coordonată coincide chiar cu **spațiul parcurs** de mobil până la momentul de timp t_1. Mai mult, ea și t_1 devin **coordonată inițială și, respectiv, moment inițial** pentru cea de a doua porțiune a mișcării, iar legea de mișcare pe această porțiune este:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{02} + v_2(t - t_{02}) \\ x_{02} &= x_1 = 30\ \text{m} \\ t_{02} &= t_1 = 4\ \text{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 30 - 15 \cdot (t-4) = 15 \cdot (6-t)\ \text{m}$$

b. Deoarece la momentul de timp $t = 7$ s viteza mobilului este $v_2 = -15$ m/s, coordonata mobilului la acest moment se calculează folosind a doua lege de mișcare: $x_{(t=7s)} = 30 - 15 \cdot (7-4)\text{m} = -15$ m.

c. spațiul parcurs în secunda a treia este: $x_3 = x_{(t=3s)} - x_{(t=2s)} = 10 \cdot (3-2)$ m = 10 m.

4. Pe o șosea rectilinie se deplasează un biciclist cu viteza constantă v_b. Din spate se apropie o ambulanță cu viteza constantă v_a. Sirena ambulanței emite semnale sonore extrem de scurte la intervale de timp egale Δt_a unul după altul. Sunetele se propagă în aer cu viteza constantă c ($c > v_a, v_b$). La ce intervale de timp Δt_b sunt recepționate sunetele de către biciclist?

Rezolvare:

Fie x_a și, respectiv, x_b pozițiile ambulanței și, respectiv, biciclistului în momentul t_e al emiterii unui astfel de semnal. Fie x și, respectiv, t_r locul și respectiv momentul recepționării lui.

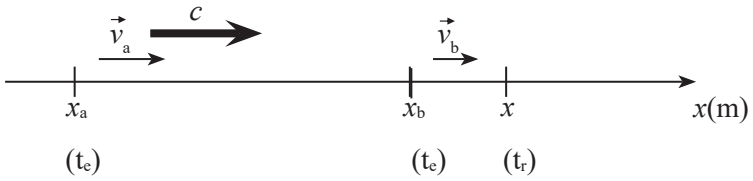


Fig. 2.3.14

Aplicăm legea mișcării rectilinii uniforme pentru sunet și pentru biciclist.

$$\begin{cases} x = x_a + c(t_r - t_e) \\ x = x_b + v_b(t_r - t_e) \end{cases} \Rightarrow x_a - x_b + (c - v_b)(t_r - t_e) = 0$$

În mod analog, pentru următorul sunet emis și recepționat, vom nota toate mărimile de mai sus cu $'$.

$$x'_a - x'_b + (c - v_b)(t'_r - t'_e) = 0$$

Scăzând cele două relații, obținem ecuația următoare:

$$(x'_a - x_a) - (x'_b - x_b) + (c - v_b)[(t'_r - t_r) - (t'_e - t_e)] = 0$$

Aplicăm acum legea mișcării rectilinii uniforme pentru ambulanță și pentru biciclist între momentele emiterii celor două sunete:

$$\begin{cases} x'_a = x_a + v_a(t'_e - t_e) \\ x'_b = x_b + v_b(t'_e - t_e) \end{cases} \Rightarrow x'_a - x'_b = x_a - x_b + (v_a - v_b)(t'_e - t_e)$$

Înlocuind acest ultim rezultat în relația anterioară, se găsește ecuația de mai jos:

$$(v_a - v_b)(t'_e - t_e) + (c - v_b)[(t'_r - t_r) - (t'_e - t_e)] = 0 \Rightarrow (v_a - c)(t'_e - t_e) + (c - v_b)(t'_r - t_r) = 0$$

Dar $t'_e - t_e = \Delta t_a$, iar $t'_b - t_b = \Delta t_b$.

$$(c - v_b)\Delta t_b = (c - v_a)\Delta t_a \Rightarrow \Delta t_b = \Delta t_a \frac{c - v_a}{c - v_b}$$

Rezultatul acestei ultimei probleme poate fi interpretat și în termeni de frecvențele cu care sunt emise și recepționate sunetele, și poartă numele de *efect Doppler clasic*.

5. Viteza unui mobil aflat în mișcare rectilinie variază conform graficului alăturat, care în unități de măsură alese în mod convenabil, are forma unui semicerc. Se cunoaște valoarea lui v_{max} exprimată în unitățile respective. Care este valoarea vitezei medii a mobilului?

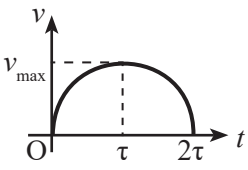


Fig. 2.3.15

Rezolvare:

Deplasarea Δx a corpului în intervalul de timp 2τ este numeric egală cu aria semicercului.

$$\Delta x = \frac{1}{2}\pi\tau v_{max}$$

(Se observă că pătratul razei cercului trebuie, de fapt, exprimat ca un produs de două raze, corespunzătoare celor două axe/dimensiuni ale cercului.)

Considerând o mișcare **rectilinie uniformă echivalentă, cu viteza constantă v_{med}**, obținem rezultatul de mai jos.

$$v_{med} = \frac{\pi}{4} v_{max} \approx 0,7854 v_{max}$$

6. Un iepure aleargă cu viteza constantă u și trece prin fața unei vulpi, la distanța D de aceasta. În momentul acela, vulpea începe să alerge cu o viteză constantă în modul, $v = u$, orientată tot timpul înspre iepure. Va reuși vulpea să prindă iepurele? În caz afirmativ, după cât timp? În caz negativ, până la ce distanță minimă se va putea ea apropia de iepure?

Rezolvare:

Alegem originea spațiului în punctul din care pornește vulpea. Fie d distanța dintre iepure și vulpe la un moment dat. Notăm cu l distanța dintre cei doi măsurată pe direcția de mișcare a iepurelui și cu α unghiul dintre vitezele celor doi la momentul respectiv.

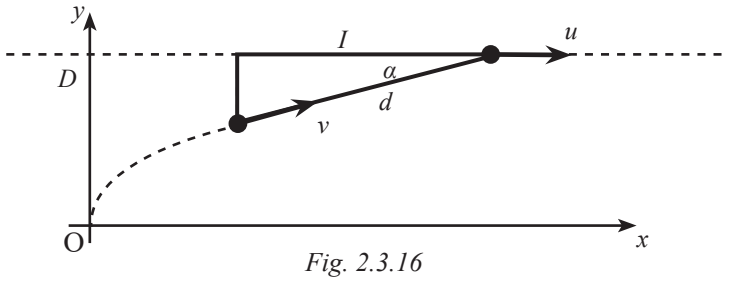


Fig. 2.3.16

Dacă descompunem viteza iepurelui, u, pe direcția ce unește vulpea și iepurele, observăm că distanța d dintre cei doi se micșorează cu viteza $v \cdot (1 - \cos\alpha)$. Dacă descompunem viteza vulpii, v, pe direcția de mișcare a iepurelui, observăm că distanța l crește cu viteza $v \cdot (1 - \cos\alpha)$. Deci cele două distanțe variază cu cantități egale în intervale de timp egale.

Cum cosinusul unghiului α este egal cu l / d, înseamnă că acest raport subunitar va tinde tot mai mult către valoarea 1, adică unghiul va scădea tot mai mult către 0 (vulpea va tinde să îl urmărească pe iepure exact pe direcția de mișcare a acestuia), iar micșorarea distanței d, practic, va înceta.

$$d_{min} = l_{max}$$

Inițial, aveam $d = D$ și $l = 0$ m, sau altfel spus $d - l = D$. Însă am văzut că exact cu cât crește l, tot cu atât scade d. Asta înseamnă că $d_{min} = D/2$.

EXERSEAZĂ

1. În graficul din fig. 2.3.17 este reprezentată dependența coordonatei unui mobil în funcție de timp.

a. Precizează semnificația fizică a intersecției graficului cu axele Ot, respectiv Ox.

b. Calculează viteza mobilului și precizează dacă mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox sau în sens opus.

c. Scrie legea de mișcare a mobilului și calculează coordonata mobilului la momentul de timp $t = 8$ s.

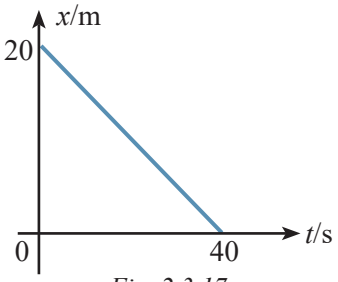


Fig. 2.3.17

2. Un mobil se deplasează pe o traiectorie rectilinie cu viteza constantă de 10 m/s și, în continuare, pe o distanță egală, cu viteza de 20 m/s. Calculează viteza medie a mobilului pe întreaga distanță parcursă.

3. Două trenuri de lungimi $l = 60$ m, respectiv $L = 90$ m se deplasează pe șine paralele, cu vitezele $v_1 = 54$ km/h, respectiv $v_2 = 25$ m/s.

a. Calculează timpul cât durează trecerea unui tren prin dreptul celuilalt, dacă trenurile se deplasează în același sens.

b. Răspunde la aceeași întrebare dacă trenurile se deplasează în sensuri opuse.

4. Un mobil efectuează un număr oarecare de mișcări rectilinii uniforme consecutive, pe aceeași direcție, cu vitezele v_i, $i = 1, \ldots, n$, în intervalele de timp Δt_i, $i = 1, \ldots, n$. Demonstrați că viteza medie a mobilului este o medie ponderată.

5. Un mobil efectuează un număr oarecare de mișcări rectilinii uniforme consecutive de-a lungul unei axe, în același sens, prima dată cu durate egale, iar a doua oară cu deplasări egale. Demonstrați că raportul vitezelor medii în cele două cazuri este strict mai mare ca 1.

6. În proba de 100 m plat de la Olimpiada de Vară de la Rio din 2016, jamaicanul Usain Bolt a câștigat medalia de aur cu timpul de 9,81 s, deși a avut al doilea cel mai slab timp de reacție la start, 0,155 s. Pentru comparație, americanul Trayvon Brommell, care a avut al doilea cel mai bun timp de reacție, 0,135 s, a terminat ultimul, cu 10,06 s. Considerând că atleții ar alerga cu viteză constantă, estimați după câți metri l-a depășit Bolt pe Brommell. Reprezentați grafic mișcarea celor doi sportivi într-un sistem de axe tOx.

7. Două mobile se mișcă rectiliniu uniform cu vitezele v_x și, respectiv v_y, de-a lungul axelor Ox și, respectiv, Oy. Dacă la un moment oarecare de timp, pozițiile corpurilor sunt x_0 și, respectiv y_0, care este distanța minimă la care se pot apropia ele unul de altul? Discuție.

8. Un tren de lungime l se deplasează cu viteză constantă v de-a lungul unei linii de cale ferată. Trenul trece prin dreptul unui perete stâncos vertical suficient de lung, așezat paralel cu linia de cale ferată. La un moment dat, mecanicul acționează sirena locomotivei pentru un foarte scurt interval de timp. Un călător aflat chiar la coada trenului aude șuierul locomotivei de două ori, la un interval de timp τ. Viteza sunetului prin aer are valoarea c. La ce distanță de calea ferată se află peretele stâncos?

9. Un avion de vânătoare supersonic zboară orizontal cu viteză constantă, trecând pe deasupra capului unui observator. Sunetul motorului este perceput de observator abia atunci când el vede avionul sub unghiul α față de linia orizontului. Se cunoaște viteza sunetului în aer c. Cu ce viteză zboară avionul?

10. Trei furnicuțe alcătuiesc vârfurile unui triunghi echilateral de latură l. Fiecare furnicuță se deplasează cu viteza scalară constantă v înspre vecina ei situată în sensul pozitiv trigonometric. După cât timp și unde se vor întâlni furnicuțele? Ce distanță va parcurge fiecare furnicuță până la întâlnire?

Lucrare experimentală

Studiul mișcării rectilinii uniforme
Măsurarea vitezei unui mobil aflat în mișcare rectilinie uniformă

Scopul lucrării este de a determina viteza unui mobil aflat în mișcare rectilinie uniformă.

I. Teoria lucrării:

În mișcarea rectilinie, dacă accelerația unui mobil are valoare zero, viteza mobilului este constantă în timp:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const.}$$

Presupunem că la momentul de timp inițial, $t_0 = 0$, coordonata mobilului, x_0, este nulă. În acest caz, coordonata mobilului, la un moment de timp t, poate fi scrisă:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v(t - t_0) \\ x_0 &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = v \cdot t.$$

Deci viteza mobilului poate fi determinată măsurând coordonata sa, x, la diferite momente de timp, t: $v = \frac{x}{t}$.

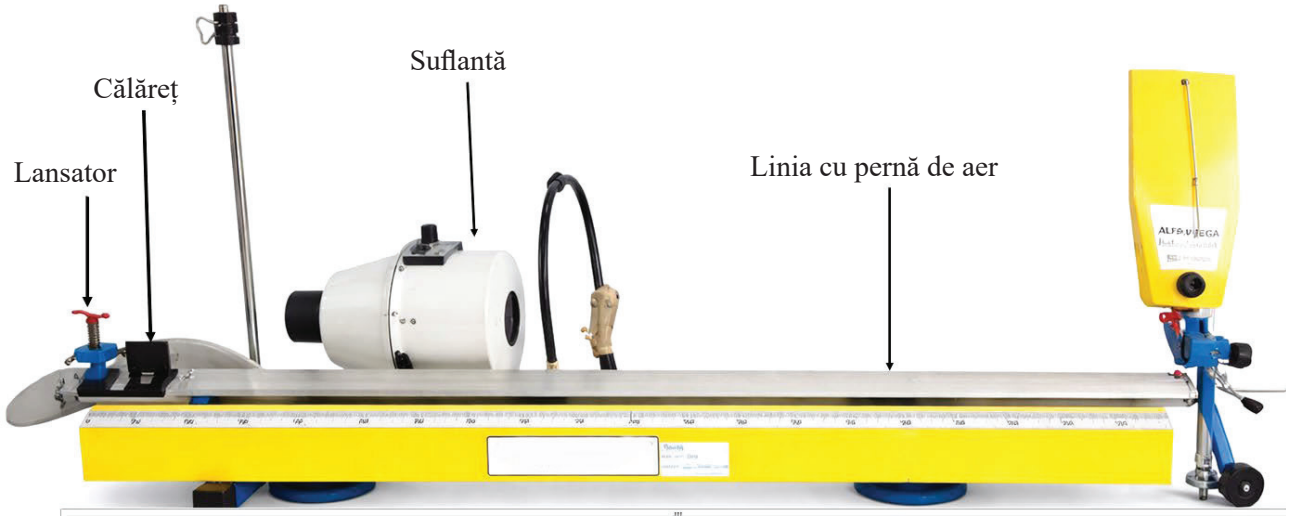
II. Materiale necesare

– *Linie cu pernă de aer;*

– *Suflantă* (*compresor*) *cu tub de legătură* (pe calea de rulare sunt practicate orificii cu diametrul de 1,2 mm; suflanta pompează aer care, ieșind prin orificiile liniei, formează o pernă de aer pe care călărețiii culisează cu frecare foarte mică);

– *Cronometru cu senzori;*

– *Călăreți.*



III. Modul de lucru și prelucrarea datelor experimentale

– *reglează* linia în poziție orizontală cu ajutorul șurubului de reglaj;

– *verifică* orizontalitatea liniei așezând un călăreț pe linie, cu suflanta decuplată; dacă acest călăreț rămâne în repaus, linia este orizontală;

– *așază* un călăreț pe linie;

– *cuplează* cordonul suflantei la linia cu pernă de aer *și pune suflanta în funcțiune*;

– *alege pe linie* (și *măsoară*) o coordonată oarecare, *x*;

– *pune în mișcare* călărețul folosind lansatorul plasat la capătul liniei și *măsoară* timpul în care călărețul parcurge distanța x (coincide cu coordonata finală; $x_0 = 0$);

– *repetă* experimentul de trei ori pentru fiecare coordonată *x* aleasă;

– *înregistrează* datele într-un tabel de forma celui de mai jos și calculează viteza călărețului:

Nr. crt.	*x* /cm	*t*/s	*v*/(cm/s)	$\overline{v}$/(cm/s)	Δv/(cm/s)	$\Delta\overline{v}$/(cm/s)	Obs.
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							

– *prezintă* rezultatul sub forma: $v = \overline{v} \pm \Delta\overline{v}$ (m/s);

– *identifică* și *notează* cel puțin trei surse de erori.

IV. Interpretarea rezultatelor

– *reia* experimentul fără ca suflanta să fie cuplată și descrie mișcarea călărețului;

– *formulează concluziile sub forma unor răspunsuri la următoarele întrebări:*

• *compară* și descrie diferențele observate, referitor la mișcarea călărețului, în cazul în care suflanta este cuplată, respectiv, decuplată;

• *explică* rolul „pernei de aer”;

• *identifică* în viața cotidiană vehicule care folosesc „perna de aer”;

• *explică*, folosind un limbaj specific fizicii, ce avantaje au aceste vehicule;

• *explică* motivul pentru care ai reluat fiecare experiment de cel puțin trei ori.

Concluzii:

• În absența suflantei, călărețul se deplasează pe o distanță scurtă și își reduce treptat viteza până se oprește, din cauza frecării. Mișcarea nu mai este rectilinie uniformă; atunci când suflanta este pornită, călărețul se deplasează aproape uniform, cu viteză constantă, deoarece frecarea este mult redusă.

• Perna de aer are rolul de a diminua frecarea dintre suprafețe, permițând observarea unei mișcări rectilinii uniforme.

• În viața cotidiană, vehiculele care folosesc acest principiu se numesc hovercraft (vehiculele pe pernă de aer).

• Acestea au avantajul reducerii frecării cu solul sau apa, ceea ce permite deplasarea mai rapidă și cu un consum energetic mai mic.

Experimentul se repetă de trei ori pentru aceeași distanță pentru a reduce erorile experimentale și a obține o valoare a vitezei cât mai aproape de cea reală.

2.3.2. Mișcarea rectilinie uniform variată

În lecția anterioară ai studiat mișcarea rectilinie uniformă, în care vectorul viteză rămâne constant în timp. Dar în viața cotidiană întâlnim frecvent situații în care viteza unui corp nu rămâne constantă. De exemplu, viteza unui vehicul care accelerează sau care frânează se modifică în timp. De asemenea, viteza corpurilor aflate în cădere liberă se modifică sub acțiunea greutății. Putem descrie matematic această schimbare? La fel ca în cazul mișcării rectilinii uniforme, este suficient să cunoaștem accelerația corpului și condițiile inițiale (poziția și viteza la momentul inițial). În această lecție vei descoperi rolul accelerației și legile mișcării rectilinii uniform variate.

În mișcarea uniform variată, vectorul accelerație este constant în timp.

Reține

În mișcarea rectilinie uniform variată, vectorul accelerație medie coincide cu vectorul accelerație instantanee a mobilului:

$$\vec{a} = \vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \quad (2.3.5)$$

Viteza mobilului la un moment de timp, oarecare, t, se calculează astfel:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad (2.3.6)$$

Ecuația 2.3.6 se numește **legea vitezei pentru mișcarea uniform variată.**

În cazul în care **accelerația este orientată pe direcția vitezei inițiale**, din relația (2.3.6) se observă că **viteza își păstrează tot timpul aceeași orientare**, deci mișcarea este **rectilinie uniform variată**.

PENTRU CURIOȘI:

În mișcarea **rectilinie uniform variată**, vectorul **viteză nu își schimbă orientarea**, iar **accelerația mobilului se reduce la accelerația tangențială, care este constantă în timp** (accelerația normală a mobilului este nulă).

În acest caz, vectorii viteză și accelerație sunt pe aceeași dreaptă, pe care o alegem ca axă a sistemului de coordonate (de exemplu, axa *Ox*), iar legea vitezei devine:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x(t - t_0) \quad (2.3.7)$$

În mișcarea rectilinie uniform variată, viteza mobilului variază liniar în timp, așa cum este reprezentat în graficul din fig. 2.3.18.

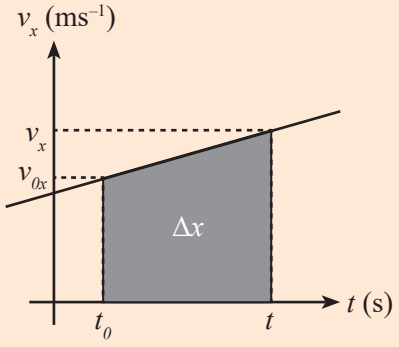


Fig. 2.3.18. Mișcarea cu accelerație constantă pe o axă (mișcarea rectilinie uniform variată)

Știm că deplasarea într-un anumit interval de timp este numeric egală cu aria delimitată de graficul vitezei corespunzător acelui interval de timp (fig. 2.3.18).

Putem calcula coordonata x a mobilului, la un moment de timp oarecare t, astfel:

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{(v_x + v_{0x})(t - t_0)}{2} = \frac{[v_{0x} + a_x(t - t_0) + v_{0x}](t - t_0)}{2} \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 \quad (2.3.8)$$

Această lege (2.3.8) reprezintă **legea de mișcare a mobilului în mișcarea rectilinie uniform variată.**

Din legea de mișcare (2.3.8) se poate observa că mișcarea este accelerată dacă viteza și accelerația mobilului au același semn, și este frânată dacă viteza și accelerația au semne opuse.

Mărimile fizice caracteristice mișcării rectilinii uniform variate pot fi reprezentate grafic, în funcție de timp, ca în figurile 2.3.19, respectiv 2.3.20:

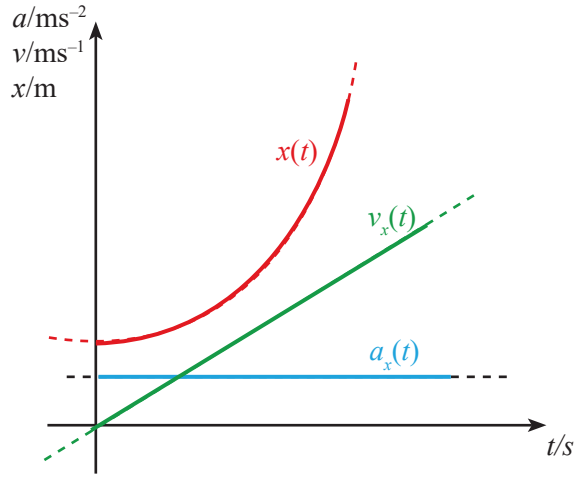


Fig. 2.3.19

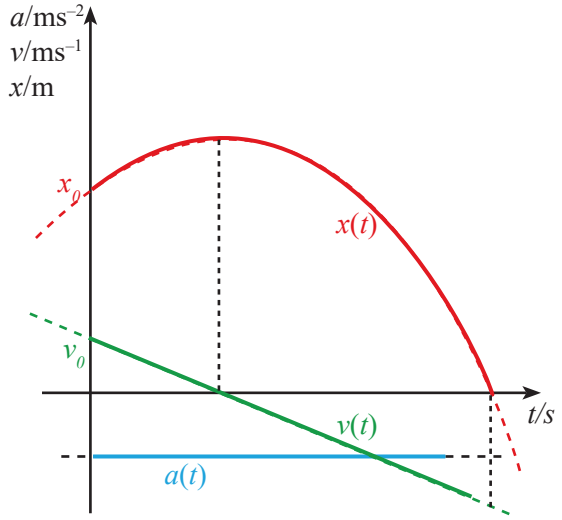


Fig. 2.3.20

Observăm că atunci când coordonata x are valori minime, respectiv maxime, viteza mobilului este nulă.

PENTRU CURIOȘI:

Dacă eliminăm timpul din ecuațiile vitezei (2.3.7), respectiv a legii de mișcare (2.3.8), obținem ecuația lui Galilei:

$$\left.\begin{aligned} v_x = v_{0x} + a_x(t - t_0) \Rightarrow t - t_0 = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \\ x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x = x_0 + \left(\frac{v_x - v_{0x}}{2a_x}\right)^2 \Rightarrow v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (2.3.9)$$

Putem rescrie ecuația 2.3.9 astfel:

$$v_x(x) = \pm\sqrt{v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)} \quad (2.3.10)$$

Din relația 2.3.10. putem observa că este posibil ca un mobil să treacă printr-o poziție x oarecare din ambele direcții, adică dus-întors, cum este posibil și să existe poziții x total inaccesibile corpului respectiv, pentru care cantitatea de sub radical devine negativă.

PENTRU CURIOȘI:

Putem gândi mișcarea în care accelerația este constantă ca pe o compunere de trei mișcări rectilinii uniform variate, pe cele trei axe în spațiu, cu accelerațiile a_x, a_y și, respectiv, a_z.

Revenind la scrierea vectorială, *legea mișcării cu accelerație constantă poate fi scrisă*:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 \quad (2.3.11)$$

Deci pentru cazul particular în care, la un moment precizat de timp, viteza și accelerația sunt coliniare, ele vor fi orientate astfel mereu, iar mișcarea va fi rectilinie uniform variată; în cazul general, vom avea o compunere de trei mișcări rectilinii uniform variate, pe cele trei axe în spațiu. Se impune totuși o observație: valoarea 0 este o constantă la fel de bună ca oricare alta, ceea ce înseamnă că mișcarea rectilinie uniformă nu este decât un caz ceva mai special de mișcare rectilinie uniform variată. Altfel spus, nu este neapărat necesar ca toate cele trei componente ale accelerației să fie diferite de zero.

APLICĂ

1. Un tren electric se deplasează cu viteza $v_0 = 90$ km/h. Din cauza unei pene de curent, trenul se oprește după $\Delta t = 10$ s. Calculează:

a. Accelerația trenului.

b. Distanța parcursă de tren până a oprire.

c. Viteza medie a trenului în intervalul de timp $\Delta t = 10$ s.

Rezolvare:

Transformăm viteza inițială a trenului în unități din SI: $v_0 = \frac{90\ \text{km}}{\text{h}} = \frac{90\cdot 10^3\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 25\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a. Pentru a calcula accelerația trenului, aplicăm legea vitezei:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x(t-t_0) \\ v_x &= 0, t_0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{25}{10}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b. Pentru a calcula distanța parcursă de tren, aplicăm legea de mișcare: $x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2$. Din datele problemei: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

Deci: $x_{op} = \left[25\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot(-2{,}5)\cdot 100\right]\text{m} = 125\ \text{m}$.

c. Viteza medie se calculează astfel: $v_{med} = \frac{x_{op} - x_0}{\Delta t} = \frac{125}{10}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 12{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Observație: Deoarece în mișcarea rectilinie uniform variată dependența de timp a vitezei mobilului este liniară, putem calcula viteza medie a mobilului și ca media aritmetică între viteza inițială și cea finală:

$$v_{med}\ \frac{v+v_0}{2} = \frac{0+25}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 12{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. Un mobil pornește într-o mișcare uniform variată, din originea axei Ox, cu viteza inițială $v_0 = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. După un timp $t = 25$ s de la începutul mișcării, mobilul trece printr-un punct de coordonată $x > 0$ cu viteza $v = -10\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a. Calculează accelerația mobilului, considerând că aceasta rămâne constantă pe toată durata mișcării.

b. Reprezintă grafic dependența de timp a vitezei mobilului.

c. Află momentul de timp la care viteza mobilului se anulează.
d. Calculează spațiul total parcurs de corp în intervalul de timp ($t_0 = 0$ s, $t = 25$ s).
e. Calculează coordonata x a mobilului la momentul de timp t.

Rezolvare:

a. Calculăm accelerația mobilului folosind legea vitezei:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x(t - t_0)$$

Înlocuind valorile numerice și ținând cont de faptul că mobilul pornește din origine ($x_0 = 0$) la momentul de timp $t_0 = 0$, vom obține: $a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{-10 - 15}{25 - 0}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b. Viteza mobilului variază în timp după legea: $v(t) = 15 - 1 \cdot t$

Deci graficul vitezei va fi o dreaptă, ca în fig. 2.3.4:

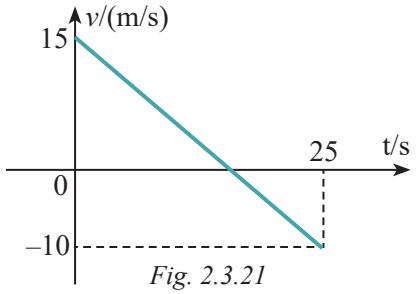


Fig. 2.3.21

c. Din legea vitezei, obținem: $\left.\begin{array}{l} v = v_0 + a \cdot t \\ v = 0, t = t_{op} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{op} = -\frac{v_0}{a} = 15 \text{ s}$

d. Spațiul total parcurs se obține însumând ariile delimitate de graficul $v\,(t)$ și axa Ot: $s = \frac{v_0 \cdot t_{op}}{2} + \frac{|v| \cdot (t - t_{op})}{2}$.

Înlocuind valorile numerice și efectuând calculele, obținem: $s = \frac{15 \cdot 15}{2}\text{ m} + \frac{|-10| \cdot (25 - 15)}{2}\text{ m} = 162{,}5$ m.

e. Putem calcula coordonata x folosind legea de mișcare a mobilului: $x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2$.

Din datele problemei: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Deci: $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 15 \cdot 25$ m $+ \frac{1}{2}(-1) \cdot (25)^2$ m $= 62{,}5$ m,

am fi obținut același rezultat dacă scădeam ariile delimitate de graficul $v\,(t)$ și axa Ot.

3. Un mobil pleacă din localitatea A cu viteza inițială $v_{01} = 4$ m/s și accelerația $a_1 = 2$ m/s^2 într-o mișcare rectilinie uniform variată. După un interval de timp Δt, din același loc și în aceeași direcție pleacă un al doilea mobil, într-o mișcare rectilinie uniformă, cu viteza $v_{02} = 20$ m/s. Presupune că traiectoriile celor două mobile se suprapun.

a. Calculează valorile posibile pentru intervalul de timp Δt astfel încât mobilele să se întâlnească de două ori.
b. Calculează valoarea posibilă a intervalului de timp Δt astfel încât mobilele să se întâlnească o singură dată.

Rezolvare:

$$x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 \quad x_2 = v_{02}(t - \Delta t)$$

(cel de-al doilea mobil pleacă mai târziu, deci va merge un timp mai scurt).

În momentul întâlnirii, coordonatele mobilelor sunt egale:

$$v_{01}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = v_{02}(t - \Delta t) \Rightarrow \frac{1}{2}a_1 t^2 + t(v_{01} - v_{02}) + v_{02}\Delta t = 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{-(v_{01} - v_{02}) \pm \sqrt{(v_{01} - v_{02})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}a_1 v_{02}\Delta t}}{a_1}$$

a. Mobilele se întâlnesc de două ori, dacă:

$$(v_{01} - v_{02})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}a_1 v_{02}\Delta t > 0 \Rightarrow \Delta t > \frac{(v_{01} - v_{02})^2}{2a_1 v_{02}} \Rightarrow \Delta t \in (0; 3{,}2 \text{ s})$$

b. Mobilele se întâlnesc o dată, dacă: $(v_{01} - v_{02})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}a_1 v_{02}\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta t = \frac{(v_{01} - v_{02})^2}{2a_1 v_{02}} \Rightarrow \Delta t = 3{,}2$ s.

EXERSEAZĂ

1. În graficul din fig. 2.3.22 este reprezentată dependența de timp a vitezei unui autoturism. Calculează:

a. Accelerația autoturismului.

b. Coordonata autoturismului la momentul de timp $t = 60$ s, dacă inițial coordonata sa față de originea sistemului de referință era $x_0 = 10$ m.

c. Spațiul parcurs de autoturism în intervalul de timp $\Delta t = 1$ min.

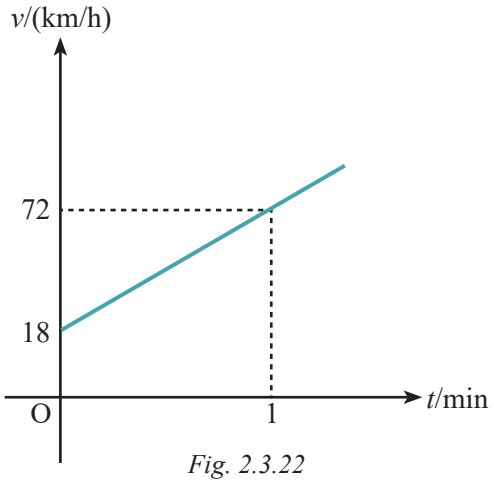


Fig. 2.3.22

2. Legea de mișcare a unui mobil este: $x = 2 + 3t - 2t^2\,(\text{m})$

a. Calculează momentul de timp la care mobilul trece prin origine.

b. Scrie legea vitezei.

c. Calculează momentul de timp la care se oprește mobilul.

3. Înainte de a opri la un semafor, un automobil care rula pe o șosea cu viteza v =54 km/h începe să frâneze uniform, oprindu-se după $\Delta t = 10$ s. Calculează accelerația cu care frânează automobilul.

4. Un biciclist pornește din repaus într-o mișcare rectilinie uniform accelerată (a =0,4 m/s^2). Calculează spațiul parcurs de biciclist în al treilea minut de la începerea mișcării.

5. Metroul parcurge distanța rectilinie dintre două stații consecutive într-un interval de timp $\Delta t = 2$ min. Viteza maximă atinsă de metrou între cele două stații este $v = 108$ km/h. Pe prima porțiune a mișcării, metroul accelerează uniform, cu accelerația a =1 m/s^2, iar înainte de oprirea în stația următoare, metroul frânează cu aceeași valoare a accelerației. Calculează:

a. Intervalul de timp în care a accelerat metroul.

b. Distanța parcursă de metrou în mișcare rectilinie uniformă.

c. Distanța dintre cele două stații de metrou.

6. În vacanța de iarnă, doi colegi de clasă, Maria și Valentin, merg la Poiana Brașov, unde se dau cu săniile pe un derdeluș, din punctul O în punctul A, pe distanța $L = 75$ m, și își continuă mișcarea pe porțiunea orizontală, pe distanța $D = 225$ m, oprindu-se în punctul B (vezi fig. 2.3.23). Consideră că fiecare copil pleacă cu sania din repaus din punctul O, iar trecerea prin punctul A de pe derdeluș pe porțiunea orizontală se face lin, fără modificarea mărimii vitezei. Maria, aflată la baza derdelușului, analizează mișcarea colegului său. Dependența de timp a vitezei lui Valentin, care alunecă cu sania pe derdeluș, este reprezentată în fig. 2.3.24.

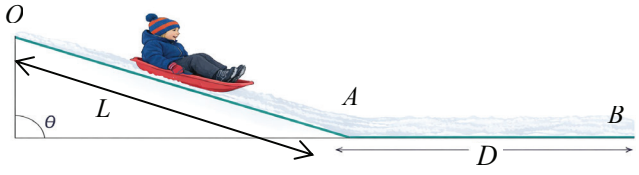


Fig. 2.3.23

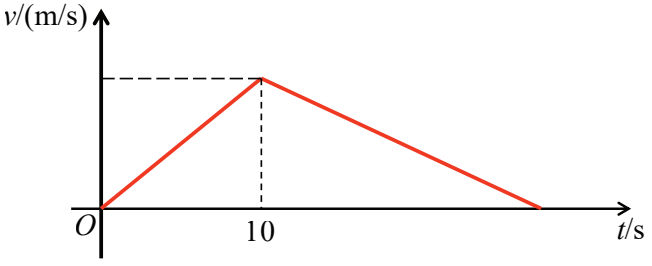


Fig. 2.3.24

Calculează:

a. accelerația lui Valentin pe porțiunea OA;

b. viteza elevului în punctul A;

c. intervalul de timp, de la pornirea din punctul O până când sania se oprește în punctul B;

d. viteza medie scalară a lui Valentin pe porțiunea OB.

2.3.3. Mișcarea circulară uniformă

Când te afli în roata panoramică din parcul de distracții, traiectoria ta față de Pământ este circulară. ***În numeroase situații din viața cotidiană și din tehnică, întâlnim corpuri care se deplasează pe traiectorii circulare.*** *Traiectoria unui satelit artificial care se rotește în jurul Pământului sau traiectoria unui punct de pe roata unui automobil aflat în mișcare, față de axul roții, sunt exemple de traiectorii circulare. Mișcarea circulară este una dintre cele mai importante mișcări curbilinii, având aplicații semnificative în fizică și inginerie. În această lecție vei învăța cum poate fi descrisă matematic această mișcare și ce mărimi fizice intervin în studiul ei.*

Pentru a defini mărimile fizice caracteristice mișcării circulare, este necesară introducerea noțiunii de radian. Radianul **este unitatea de măsură a unghiurilor în Sistemul Internațional**. El se definește ca fiind valoarea unghiului la centru care subîntinde un arc de cerc cu lungimea egală cu raza.

Relația matematică dintre valoarea θ a unui unghi exprimată în radiani, lungimea l a arcului subîntins corespunzător și, respectiv, raza R a cercului considerat este dată de relația: $\theta = \frac{l}{R}$.

În mișcarea circulară uniformă, traiectoria mobilului este un cerc, iar modulul vectorului viteza a mobilului este constant (fig. 2.3.25).

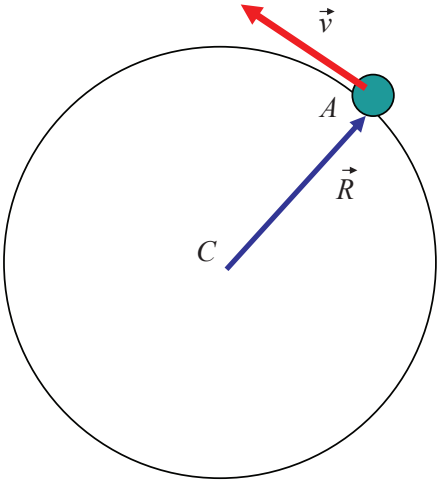


Fig. 2.3.25

Vectorul de poziție $\vec{R} = \overrightarrow{CA}$ al mobilului se mai numește și **rază vectoare**. În timpul mișcării circulare uniforme, raza vectoare descrie (mătură) aria cercului, iar **vectorul viteză, constant ca modul, este tangent la traiectorie**, deci perpendicular pe raza vectoare la orice moment de timp.

După ce mobilul parcurge întreaga circumferință a cercului, mișcarea sa se va repeta.

Reține
Mișcarea circulară uniformă este o mișcare **periodică.**

Reține
Numim **perioada *T*** a mișcării circulare uniforme **intervalul de timp în care mobilul efectuează o rotație completă**.
În SI, perioada se măsoară în secunde: $[T]_{SI} = \text{s}$.

De exemplu, dacă mobilul efectuează N rotații în Δt secunde, putem exprima perioada astfel: $T = \frac{\Delta t}{N}$.
O caracteristică a mișcării circulare uniforme, utilizată des în practică, este frecvența de rotație ν.

Reține

Numim frecvență mărimea fizică scalară numeric egală cu **numărul de rotații efectuate în unitatea de timp**: $\nu = \frac{N}{\Delta t}$

Unitatea de măsură pentru frecvență în Sistemul Internațional de Unități este: $[\nu]_{SI} = \frac{1}{s} = \text{Hz}$ (hertz).

Se observă ușor că între perioada de rotație și frecvență există relația: $\left.\begin{aligned} T &= \frac{\Delta t}{N} \\ \nu &= \frac{N}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \frac{1}{\nu}$ (2.3.12)

În tehnică, este des folosită mărimea fizică numită **turație (*n*),** definită ca fiind mărimea fizică scalară numeric egală cu numărul de rotații efectuate într-un minut. Turația are ca unitate de măsură: $[n] = \frac{\text{rot}}{\text{min}}$.

În tabelul de mai jos am notat câteva exemple de turații pentru diverse corpuri aflate în mișcare circulară uniformă:

Nr. crt.	Corpul a cărui traiectorie este circulară	Turația (rot/min)
1	Motor de mașină (ralanti)	700-900
2	Motor de mașină (în mers)	2000-4000
3	Hard disc (HDD)	5400 sau 7200
4	Turbină cu abur	3000
5	Motor de avion cu reacție	poate depăși 10.000

Să considerăm un mobil aflat în mișcare circulară uniformă (fig. 2.3.26). La momentul de timp inițial, t_0, mobilul se află în punctul *A*, iar la momentul *t*, mobilul ajunge în punctul *B*.

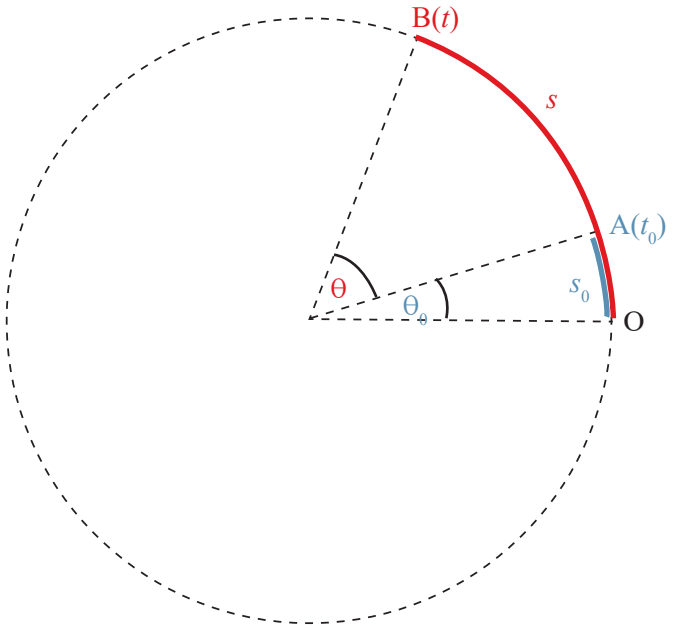


Fig. 2.3.26

Poziția mobilului pe traiectoria circulară poate fi determinată folosind **coordonata curbilinie *s*, măsurată în sens trigonometric pe cerc (lungimea arcului)**, de la originea O considerată. În mișcarea circulară uniformă, vectorul viteză variază ca orientare, dar nu variază ca modul. Mișcarea fiind uniformă, **legea de mișcare** în mișcarea circulară uniformă se poate obține analog mișcării rectilinii uniforme:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \text{const.} \Rightarrow s = s_0 + v(t - t_0) \quad (2.3.13)$$

Putem exprima lungimea arcului Δs în funcție de raza cercului R și de unghiurile la centru θ, θ_0:

$$\Delta s = R \cdot (\theta - \theta_0) = R \cdot \Delta\theta$$

Reține

În mișcarea circulară uniformă, raza vectoare descrie arce egale, deci și unghiuri egale, în intervale de timp egale.

Definiție

Definim **viteza unghiulară medie** ω ca fiind mărimea fizică numeric egală cu unghiul la centru descris de raza vectoare în unitatea de timp:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},\ [\omega]_{SI} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

PENTRU CURIOȘI:

Viteza unghiulară este mărime fizică vectorială, dar în toate considerațiile din acest capitol, vom lucra doar cu modulul acestui vector.

Analog mișcării rectilinii uniforme, în mișcarea circulară uniformă se poate afirma că viteza unghiulară instantanee (la un moment oarecare de timp) este constantă și coincide cu viteza unghiulară medie. Ca urmare, putem exprima **legea de mișcare în funcție de mărimi unghiulare astfel**:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ \Delta\theta &= \theta - \theta_0 \\ \Delta t &= t - t_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) \quad (2.3.14)$$

Reține

Dacă mobilul se deplasează în sens orar (invers sensului trigonometric), legile de mișcare 2.3.13 și 2.3.14 devin: $s = s_0 - v(t - t_0)$, respectiv: $\theta = \theta_0 - \omega(t - t_0)$ (2.3.15)

Deci, pentru a înțelege complet mișcarea circulară uniformă, putem studia fenomenul din două perspective: a vitezei cu care mobilul se deplasează de-a lungul cercului, numită **viteza liniară**, respectiv a vitezei cu care se rotește în jurul centrului, **numită viteza unghiulară.**

Putem stabili o relație matematică între cele două viteze:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ \Delta s &= R\Delta\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} v &= \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} \\ \frac{\Delta\theta}{\Delta t} &= \omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = R\omega \quad (2.3.16)$$

În timpul unei perioade, mobilul parcurge circumferința cercului:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ \Delta s &= 2\pi R \\ \Delta t &= T \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T} \quad (2.3.17)$$

Folosind relația matematică 2.3.16, dintre viteza liniară și cea unghiulară, obținem:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\pi R}{T} \\ v &= R\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon \quad (2.3.18)$$

Deoarece vectorul viteză variază ca orientare, **un mobil aflat în mișcarea circulară uniformă are accelerație, numită accelerație normală sau centripetă**:

$$\vec{a}_n = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Pentru a calcula această accelerație, considerăm mobilul aflat în mișcarea circulară uniformă, în două poziții A și B, la două momente de timp succesive, t și $t + \Delta t$ (fig. 2.3.27).

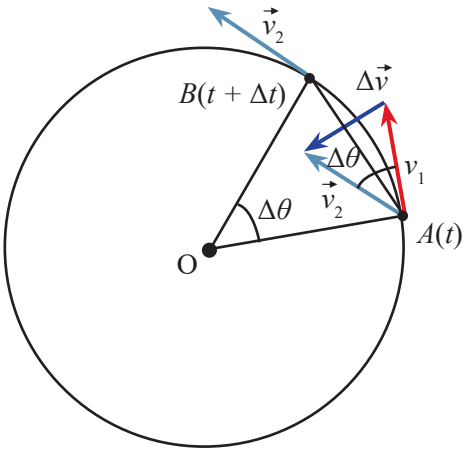


Fig. 2.3.27

Vectorii $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ au module egale, v, dar orientări diferite (sunt tangenți la traiectoria circulară). Pentru a calcula modulul vectorului $\Delta\vec{v}$, translatăm vectorul $\vec{v}_2$ în punctul A. Triunghiul format de cele două raze vectoare și coarda AB este asemenea cu triunghiul format de cele două viteze și variația lor (triunghiuri cu laturile perpendiculare):

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{AB}{R} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = AB \cdot \frac{v}{R}$$

Dacă intervalul de timp Δt este foarte, foarte mic $(\Delta t \to 0)$, coarda AB se confundă cu arcul AB, deci relația 2.3.8 devine:

$$|\Delta\vec{v}| = R\Delta\theta \cdot \frac{v}{R} = v\Delta\theta \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega$$

$$\left.\begin{aligned} |\vec{a}| &\cong v \cdot \omega \\ v &= \omega \cdot R \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\vec{a}| = \omega^2 \cdot R \quad (2.3.19)$$

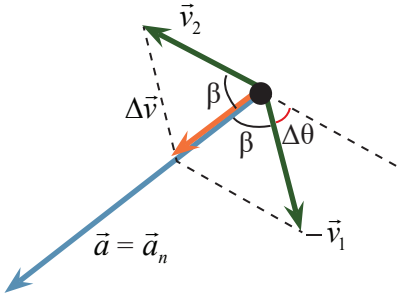


Fig. 2.3.28

Pentru a stabili orientarea vectorului accelerație în mișcarea circulară uniformă, să analizăm fig. 2.3.28.

Observăm că: $2\beta + \Delta\theta = 180^\circ$

Dacă unghiul $\Delta\theta$ este foarte, foarte mic, poate fi neglijat, deci, practic, unghiul β va fi egal cu 90°, deci **accelerația** va fi îndreptată pe direcția razei, spre centrul cercului, **perpendicular pe vectorul viteză** (fig. 2.3.29).

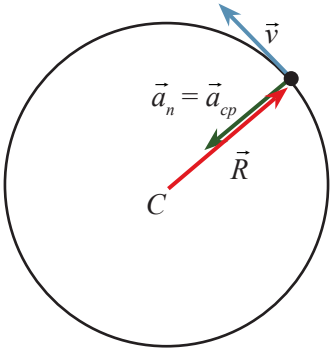


Fig. 2.3.29

Reține

Vectorul accelerație normală (numit și accelerație centripetă deoarece este orientat spre centrul cercului) **este perpendicular pe vectorul viteză** la orice moment de timp: $\vec{a}_n = \vec{a}_{cp} = -\omega^2\vec{R}$

Modulul vectorului accelerație normală are valoarea:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{cp} = \omega^2 R \\ v &= \omega R \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = a_{cp} = \frac{v^2}{R} \quad (2.3.20)$$

În figurile 2.3.30 și 2.3.31. am ilustrat câteva corpuri aflate în mișcare circulară uniformă și am reprezentat vectorii viteză și accelerație normală.



Fig. 2.3.30. Motociclistul se află în mișcare circulară uniformă față de Pământ; persoanele din carusel se află în mișcare circulară uniformă față de axul vertical central al caruselului; elicea află în mișcare circulară uniformă față de avion.

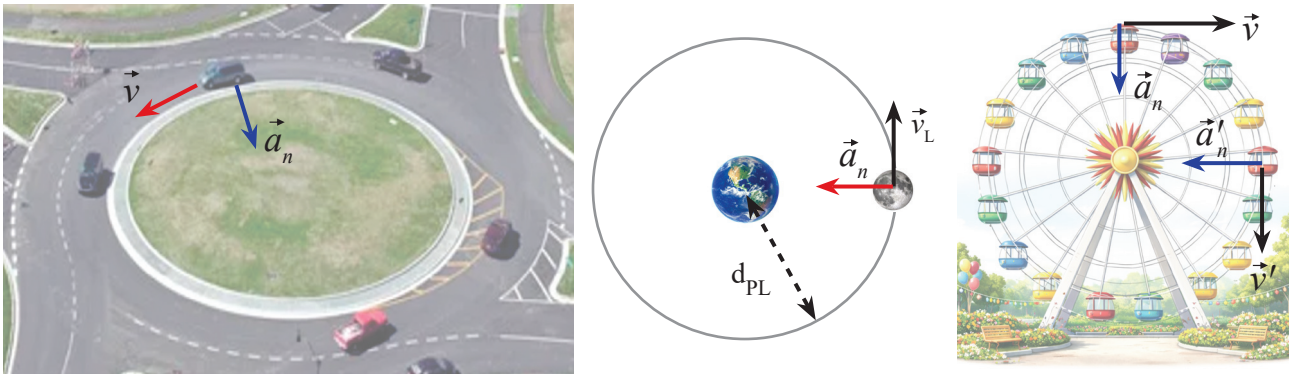


Fig. 2.3.31. La sensul giratoriu, traiectoriile mașinilor sunt circulare. Luna se mișcă pe o traiectorie (aproape) circulară față de Pământ. Mișcarea cabinelor roții panoramice față de axul orizontal al roții sau față de un observator aflat în repaus pe sol este, de asemenea, circulară.

APLICĂ

1. Plecând de la definiția radianului, calculează valoarea (exprimată în radiani) a unghiului la centru corespunzător unui arc de cerc a cărui lungime este egală chiar cu circumferința cercului considerat. Aproximează apoi la un număr întreg de grade valoarea unui radian.

Rezolvare:

În circumferința unui cerc se cuprind un număr de 2π raze, deci unghiul la centru are valoarea 2π radiani. Această valoare corespunde la 360°, deci $1\,\text{rad} = \frac{360°}{2\pi} \approx \frac{360°}{6,28} \approx 57°$.

2. Consideră că Pământul este o sferă a cărei perioadă de rotație în jurul propriei axe verticale, de simetrie, este $T = 24$ h. Raza traiectoriilor circulare descrise de punctele de pe suprafața Pământului scade de la Ecuator spre cei doi Poli. Raza medie a Pământului este $R = 6400$ km.

Calculează:

a. Frecvența de rotație a punctelor de pe suprafața Pământului față de axa verticală de simetrie.

b. Viteza unghiulară de rotație a punctelor de pe suprafața Pământului față de aceeași axă ca la punctul a.

c. Viteza liniară a unui punct de pe suprafața Pământului aflat la latitudinea $\varphi = 45°$.

d. Accelerația normală a aceluiași punct aflat la latitudinea $\varphi = 45°$.

Rezolvare:

a. Ai învățat că între perioada de rotație și frecvență există relația:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} \\ T &= 24\,\text{h} = 24 \cdot 3600 = 86400\,\text{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nu = \frac{1}{8,64 \cdot 10^4}\ \text{Hz} \cong 1,16 \cdot 10^{-5}\,\text{Hz}$$

b. Putem calcula viteza unghiulară de rotație astfel:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{8,64 \cdot 10^4}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cong 7,27 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

c. Pentru a rezolva această cerință, observăm că viteza unghiulară de rotație are aceeași valoare pentru toate punctele aflate pe suprafața Pământului, dar raza traiectoriilor circulare descrise de aceste puncte scade de la Ecuator spre cei doi Poli (fig. 2.3.32). Deci viteza liniară scade și ea de la Ecuator spre cei doi Poli.

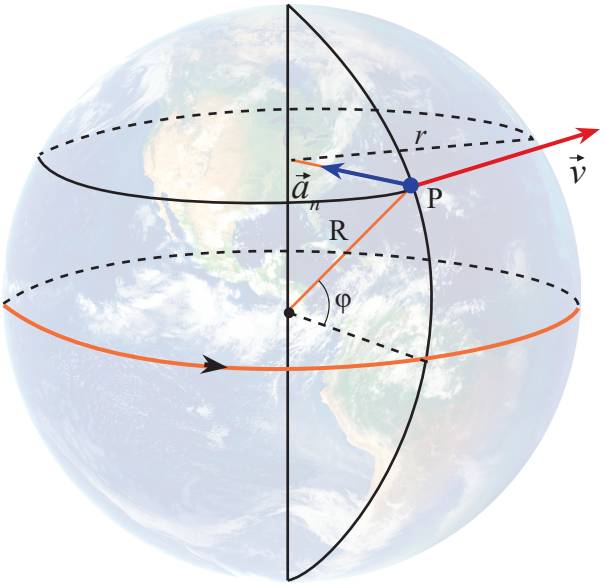


Fig. 2.3.32

La latitudinea cerută:

$$\left.\begin{aligned} v &= \omega r \\ r &= R\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \omega R\cos\varphi = \frac{2\pi}{T} R\cos\varphi$$

Efectuând calculele numerice, obținem:

$$v = \frac{2\pi}{T} R\cos\varphi = \frac{2 \cdot 3,14}{24 \cdot 3600} 6400 \cdot 10^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cong 328\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d. Accelerația normală se calculează astfel:

$$a_n = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi \cong 0,025\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. Vârful minutarului unui ceasornic aflat într-un turn s-a deplasat cu $\Delta s = 12,56$ cm în $\Delta t = 60$ s. Calculează lungimea minutarului.

Rezolvare:

Lungimea minutarului este, de fapt, raza traiectoriei circulare descrise de vârful acestui ac de ceas. Utilizând mărimile fizice învățate în această lecție, putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\Delta s}{\Delta\theta} \\ l &= R \\ \Delta\theta &= \omega \cdot \Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} l &= \frac{\Delta s}{\omega \cdot \Delta t} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow l = \frac{T \cdot \Delta s}{2\pi \cdot \Delta t} = \frac{3600 \cdot 12,56 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 60}\ \text{m} = 1,20\ \text{m}$$

3. Doi cicliști rulează uniform pe piste circulare concentrice de *lungimi* L_1 și, respectiv, L_2 ($L_2 > L_1$). Când merg în sensuri contrare, primul ciclist (care parcurge circumferința interioară) îl întâlnește pe cel de al doilea la fiecare interval de timp τ. Viteza unghiulară a primului ciclist este ω_1. Momentul unei întâlniri se consideră a fi atunci când cei doi cicliști se află pe o aceeași semidreaptă dusă din centrul comun al celor două piste. Calculează:

a. vitezele liniare ale celor doi cicliști.

b. accelerațiile lor centripete.

Rezolvare:

a. Viteza liniară a primului mobil este:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 R_1 \\ R_1 &= \frac{L_1}{2\pi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_1 = \omega_1 \frac{L_1}{2\pi}$$

Din fig. 2.3.33 se observă că dacă cicliștii rulează în sensuri opuse, deci putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &= 2\pi \\ \theta &= \omega\tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\omega_1 + \omega_2)\tau = 2\pi \Rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{\tau} - \omega_1$$

Viteza liniară a celui de al doilea ciclist este: $v_2 = \omega_2 R_2 = \left(\frac{2\pi}{\tau} - \omega_1\right)\frac{L_2}{2\pi}$.

b. Accelerațiile normale sunt:

$$a_{1n} = \omega_1^{\,2} R_1 = \omega_1^{\,2} \frac{L_1}{2\pi}$$

$$a_{2n} = \omega_2^{\,2} R_2 = \left(\frac{2\pi}{\tau} - \omega_1\right)^2 \frac{L_2}{2\pi}$$

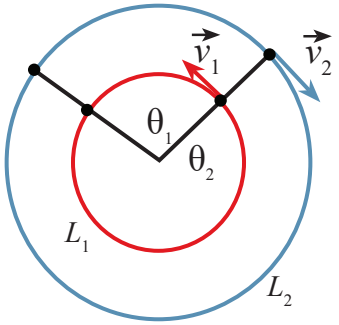


Fig. 2.3.33

EXERSEAZĂ

1. Calculează viteza unghiulară a unui CD, știind că are turația n = 300 rot/min.

2. Viteza liniară periferică a discurilor de polizor nu trebuie să depășească valoarea v = 10 m/s. Calculează turația maximă pe care o poate avea un disc cu diametrul D = 10 cm.

3. Doi cicliști rulează uniform pe piste circulare concentrice de lungimi L_1 și, respectiv, L_2 ($L_2 > L_1$). Când merg în același sens, ciclistul 1 (care parcurge circumferința interioară) îl depășește pe celălalt la fiecare interval de timp τ. Viteza unghiulară a primului mobil este ω_1. Momentul unei întâlniri se consideră a fi atunci când cei doi cicliști se află pe o aceeași semidreaptă dusă din centrul comun al celor două piste. Calculează:

a. vitezele liniare ale celor doi cicliști;

b. unghiul la centru măturat de raza vectoare a celui de al doilea ciclist între două depășiri consecutive.

4. Calculează vitezele unghiulare ale acelor minutar și orar ale unui ceasornic. La ce interval de timp se suprapun cele două ace?

5. Un motociclist rulează pe o pistă circulară cu viteza v = 72 km/h. Diametrul roții motocicletei este D = 0,4 m. Răspunde la următoarele întrebări:

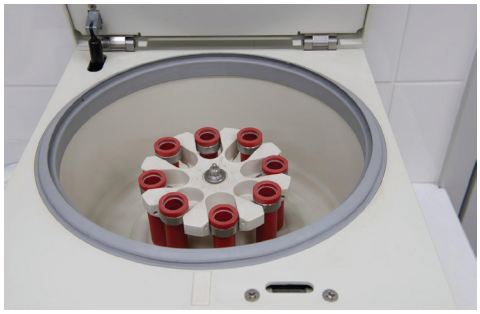
a. Ce viteză unghiulară au punctele roții față de axul acesteia?

b. Ce lungime parcurge centrul de greutate al motociclistului pe traiectoria circulară în timp ce roata efectuează o rotație completă?

6. Centrifugele de laborator (fig. 2.3.34) sunt aparate folosite pentru a separa componentele unui amestec lichid prin rotire foarte rapidă. În laboratoare, centrifugele au multe aplicații: separă sângele în plasmă și celule roșii sau izolează proteinele din celule.

a. Calculează accelerația normală a eprubetelor aflate la distanța d = 8 cm de axa de rotație, știind că centrifuga efectuează 3600 rot/min.

b. Compară această accelerație cu accelerația gravitațională (g = 10 m/s^2).


Fig. 2.3.34

TEST DE EVALUARE

Pentru fiecare exercițiu, răspunsul corect se notează cu 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

1. Alege (și încercuiește) afirmația care *nu* este corectă:
a. În Sistemul Internațional de Unități, viteza unghiulară se măsoară în rad/s.
b. În mișcarea rectilinie uniformă, accelerația mobilului este zero, vectorul viteză este constant în timp, iar coordonata mobilului variază liniar în timp.
c. În mișcarea circulară uniformă, traiectoria mobilului este circulară, iar vectorul viteză este constant în timp.
d. Traiectoria mobilului reprezintă succesiunea de puncte descrise de mobil în mișcarea sa.

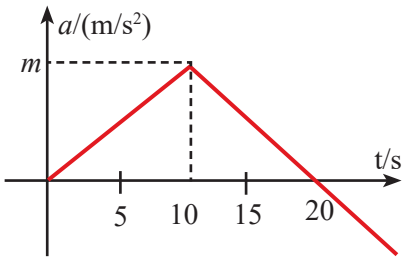
2. Marchează cu adevărat (A) sau fals (F) următoarele afirmații:
a. Mișcarea este accelerată dacă viteza și accelerația au același sens.
b. În mișcarea rectilinie, vectorul viteză își modifică direcția.
c. Pământul nu poate fi considerat niciodată punct material.
d. În mișcarea circulară uniformă, perioada reprezintă timpul necesar mobilului pentru a efectua o rotație completă.

3. Justifică răspunsul dat la afirmația de la punctul c, de la exercițiul de mai sus.

4. Identifică și descrie două tipuri de mișcare întâlnite în viața cotidiană.

5. Explică dacă suma pe care o plătim pentru o cursă cu taxiul este proporțională cu *lungimea traiectoriei parcurse* sau cu *modulul vectorului deplasare*. Însoțește explicația de o diagramă care să justifice răspunsul ales.

6. Dependența de timp a accelerației unui mobil care pornește din repaus este reprezentată în figura alăturată. Traiectoria mobilului este rectilinie. Mobilul atinge viteza maximă la momentul de timp:
a. 10 s
b. 15 s
c. 20 s
d. 5 s



7. Viteza unui mobil aflat în mișcare pe o traiectorie rectilinie variază în timp după legea: $v = 15 - 10t$ (m/s) Lungimea traiectoriei mobilului din momentul inițial $t_o = 0$ până în momentul opririi este:
a. 10,25 m
b. 11,25 m
c. 20,00 m
d. 5,75 m

8. Un avion zboară spre vest, deasupra Ecuatorului, la altitudinea h = 10 km, măsurată de la suprafața Pământului. Calculează viteza avionului, dacă piloții văd soarele staționar. Raza medie a Pământului este R = 6370 km, iar perioada de rotație a Pământului în jurul propriei axe este T = 24 h.

9. Un tren se deplasează rectiliniu uniform. La un moment dat, se desprinde de tren ultimul vagon, care parcurge până la oprire, într-o mișcare rectilinie uniform încetinită, distanța s = 200 m. Considerând că trenul nu-și modifică viteza, în momentul opririi, vagonul se va afla față de tren la distanța:
a. 400 m
b. 300 m
c. 200 m
d. 100 m



La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să înțelegi conceptul de inerție și să identifici formele de manifestare ale inerției corpurilor în viața cotidiană;
- să identifici situații în care forțele de frecare sunt utile sau, dimpotrivă, dăunătoare (și trebuie reduse);
- să identifici și să descrii situații în care anumite forțe devin forțe centripete;
- să identifici forțe de tip acțiune-reacțiune în natură și să formulezi concluzii referitoare la aceste perechi de forțe;
- să realizezi experimente cu scopul verificării legilor frecării la alunecare;
- să analizezi, din perspective multiple, câmpul gravitațional al Pământului.
- să aplici principiile mecanicii newtoniene în rezolvarea de probleme simple;
- să realizezi și să utilizezi diagramele corpului liber în rezolvarea problemelor de dinamică.

Capitolul 3

Principiile mecanicii newtoniene și aplicarea acestora

3.1. Principiile dinamicii newtoniene

Principiul inerției (Lex prima)

Galileo Galilei a realizat experimente legate de inerție la Universitatea din Pisa, între anii 1589-1592. El a demonstrat, folosind plane înclinate, că un corp tinde să-și păstreze starea de mișcare: cu cât frecarea este mai mică, cu atât corpul se deplasează mai mult, iar în absența frecării ar continua să se miște la nesfârșit.

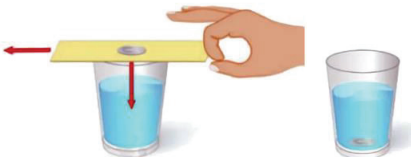


Fig. 3.1.1a. Datorită inerției, moneda își păstrează starea de repaus

Reține

Proprietatea unui corp de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă în absența unor acțiuni exterioare se numește **inerție.**

În absența unei acțiuni exterioare, datorită inerției, corpurile:

- își păstrează starea de repaus;
- își păstrează starea de mișcare rectilinie și uniformă;
- își păstrează traiectoria rectilinie.

Putem afirma că, datorită inerției, corpurile se opun oricărei acțiuni exterioare care tinde să le schimbe starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă.

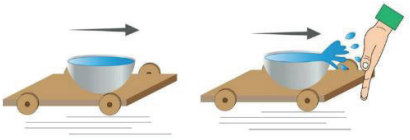


Fig. 3.1.1b. Datorită inerției, apa își păstrează starea de mișcare rectilinie și uniformă

Principiul inerției, enunț:

Formularea 1: *Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atât timp cât asupra lui nu acționează alte corpuri care să-i modifice această stare* (fig. 3.1.1 a, b).

Conform principiului inerției, mișcarea rectilinie și uniformă se autoîntreține.

INVESTIGHEAZĂ! ***Cum este influențată inerția unui corp de masa sa?***

Scopul activității: investigarea relației dintre masa unui corp și inerția acestuia.

Materiale necesare: două cărucioare cu mase diferite, resort, șnur, mase marcate, riglă sau ruletă.

Modul de lucru:

– cântărește fiecare cărucior și notează cu (I) cărucioul cu masă mică și cu (II) cărucioul cu masă mare;

– așază în interiorul cărucioului II mase marcate;

– așază cărucioarele pe o suprafață orizontală, cu același grad de rugozitate pe toată lungimea ei;

– apropie cărucioarele și fixează între ele un resort comprimat;

– menține resortul comprimat legând cărucioarele cu un fir (fig. 3.1.2);

– marchează poziția inițială a roților din spate pentru fiecare cărucior;

– taie firul și observă mișcarea fiecărui cărucior;

– marchează poziția roților din spate pentru fiecare cărucior după oprire;

– măsoară și notează distanțele parcurse fiecare cărucior: (x_1) pentru cărucioul cu masă mică și (x_2) pentru cărucioul cu masă mare (fig. 3.1.2);

– repetă experimentul cu mase diferite ale cărucioului II și resorturi diferite.

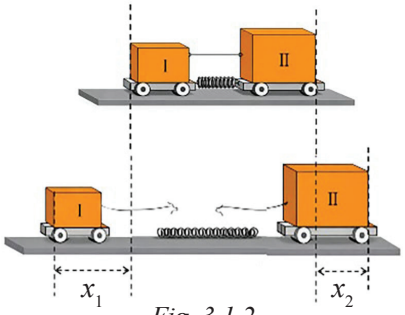


Fig. 3.1.2

Completează tabelul de date experimentale:

Nr. determinării	x_1/cm	x_2/cm	(x_1) /(x_2)

Compară distanțele parcurse de cele două cărucioare până la oprire.

Răspunde la următoarele întrebări:

– Care dintre cele două cărucioare parcurge o distanță mai mare?

– Care cărucior se opune mai puternic schimbării stării de mișcare?

– Care cărucior are inerția mai mare?

Concluzii:

• Cu cât masa unui corp este mai mare, cu atât modificarea stării sale de mișcare este mai dificilă.

• Cu cât masa unui corp este mai mare, cu atât inerția sa este mai mare.

Reține

Masa (m) este mărimea fizică scalară ce măsoară inerția unui corp.

$$[m]_{SI} = \text{kg} \qquad (3.1.1)$$

În mecanica clasică, masa unui corp este o constantă atribuită corpului respectiv. Ea are aceeași valoare pe Pământ, pe Lună sau în spațiul cosmic.

Masa se măsoară cu balanța folosind mase marcate (fig. 3.1.3).



Fig. 3.1.3

Principiul fundamental (Lex secunda)

Reține

Forța ($\vec{F}$) *este o mărime fizică vectorială ce măsoară interacțiunea dintre corpuri.*

$$[F]_{SI} = \text{N (newton)}$$

Forțele produc *efecte statice* (de deformare a corpurilor) sau *efecte dinamice* (de modificare a vitezei sau traiectoriei corpurilor – adică produc o accelerație). Forțele se măsoară cu dinamometrul (fig. 3.1.4).

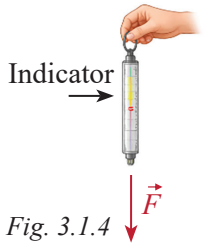


Fig. 3.1.4

Principiul fundamental al mecanicii newtoniene, enunț:

Formulare 1

Accelerația imprimată unui corp este direct proporțională cu forța care acționează asupra corpului și are direcția și sensul acestei forțe (fig. 3.1.5).

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (3.1.2)$$

Observație:

Dacă asupra unui corp acționează mai multe forțe, atunci accelerația corpului este determinată de forța rezultantă: $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{rez}}{m}$.

Din relația (3.1.2), obținem:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i}{\Delta t} \qquad (3.1.3)$$

unde $\vec{v}_f$ este viteza finală a corpului, iar $\vec{v}_i$ este viteza inițială.

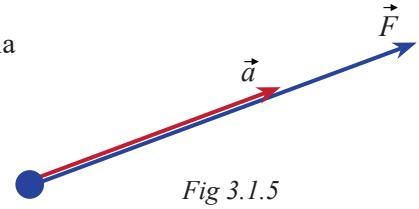


Fig 3.1.5

Impulsul unui punct material ($\vec{p}$)

Reține

Impulsul unui punct material ($\vec{p}$) este mărimea fizică vectorială egală cu produsul dintre masa și viteza punctului material.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad (3.1.4)$$

Impulsul are direcția și sensul vitezei (fig. 3.1.6).

$$[p]_{SI} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{N} \cdot \text{s}$$

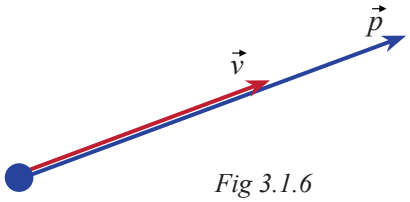


Fig 3.1.6

Din relațiile (3.1.3) și (3.1.4), obținem:

$$\vec{F} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \qquad (3.1.5)$$

Relația (3.1.5) permite o altă formulare pentru enunțul principiului fundamental:

Principiul fundamental al mecanicii newtoniene, enunț:

Formulare 2

Forța este numeric egală cu variația impulsului în unitatea de timp. (principiul al II-lea al mecanicii în formularea lui Newton).

Forța $\vec{F}$ are direcția și sensul variației impulsului $\Delta\vec{p}$ (fig.3.1.7).

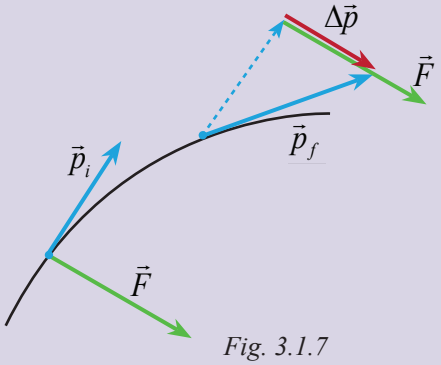


Fig. 3.1.7

Principiul acțiunilor reciproce (Lex terția)

În procesul de interacțiune a două corpuri, fiecare corp exercită câte o forță asupra celuilalt, adică apar totdeauna simultan două forțe, numite acțiune și reacțiune.

În fig. 3.1.8 sunt reprezentate două dinamometre identice, A și B. Dacă se trage de unul dintre dinamometre, ambele vor fi indica forțe egale în modul și de sens contrar, indiferent de care dinamometru se trage.

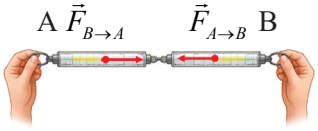


Fig.3.1.8 Acțiune și reacțiune

Enunțul principiului acțiunii și reacțiunii

Dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță, numită acțiune, și cel de al doilea corp acționează asupra primului corp cu ***o forță egală în modul și de sens opus*** numită **reacțiune** (fig. 3.1.8).

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} \qquad (3.1.7)$$

$\vec{F}_{A\to B}$ este forța cu care corpul A acționează asupra corpului B;

$\vec{F}_{B\to A}$ este forța cu care corpul B acționează asupra corpului A.

Reține

Atunci când două corpuri interacționează, apare o pereche de forțe numite **acțiune** și **reacțiune**.

Acțiunea și reacțiunea apar simultan, nu există o prioritate a unei forțe față de cealaltă.

Acțiunea și reacțiunea acționează asupra unor corpuri diferite și, din acest motiv, ele nu se compun și nu se anulează.

Principiul independenței acțiunii forțelor

Enunțul principiului independenței acțiunii forțelor

Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale.

Dacă *n* forțe acționează simultan asupra unui punct material, putem scrie:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, ..., \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m} \quad (3.1.8)$$

$$\vec{a}_{rez} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n}{m} = \frac{\vec{F}_{rez}}{m}$$

$$\vec{F}_{rez} = m \cdot \vec{a}_{rez} \quad (3.1.9)$$

Dacă asupra unui punct material acționează simultan mai multe forțe, atunci accelerația lui este proporțională cu forța rezultantă $(\vec{F}_{rez})$. Ea are direcția și sensul forței rezultante (fig.3.1.8).

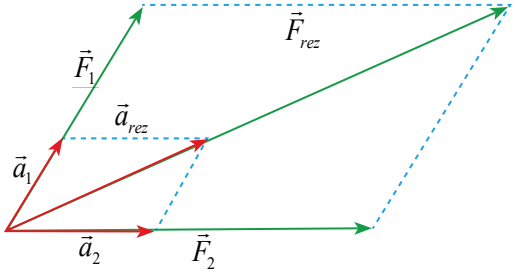


Fig. 3.1.8. Principiul independenței acțiunii forțelor

APLICĂ

1. De ce prin „baterea" covoarelor (fig. 3.1.9) acestea se curăță de praf ?

Rezolvare:

Prin lovire, covorul este pus brusc în mișcare în timp ce particulele de praf rămân în repaus datorită inerției. Astfel are loc separarea prafului de covor și deci curățarea covorului.



Fig. 3.1.9. Problema 1

2. Asupra unui corp cu masa *m*, aflat în spațiul cosmic, acționează o forță care îi imprimă o accelerație $a = 2{,}4$ m/s^2 . Calculează accelerația a_1 pe care o va căpăta un corp, în aceleași condiții, dacă masa lui este de patru ori mai mare și forța care acționează asupra lui este de 2 ori mai mică.

Rezolvare:

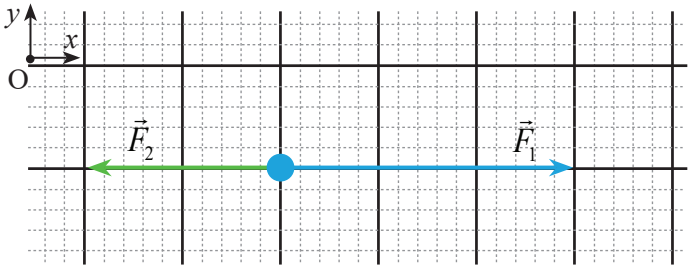
$$a = 2{,}4 \text{ m/s}^2,\ m_1 = 4m,\ F_1 = \frac{F}{2},$$

$$a_1 = ?\ \ a = \frac{F}{m}, a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{F}{8m} \quad a_1 = \frac{a}{8} = 0{,}3 \text{ m/s}^2$$

3. Asupra unui corp cu masa $m = 2$ kg acționează numai forțele reprezentate în fig. 3.1.10 ale căror mărimi sunt: $F_1 = 15$ N și $F_2 = 10$ N. Calculează accelerația pe care o va avea corpul față de sistemul de referință inerțial în care se află.

Rezolvare:

$m = 2$ kg, $F_1 = 15$ N, $F_2 = 10$ N, $a = ?$ $\qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a},\ F_1 - F_2 = ma,\ a = \frac{F_1 - F_2}{m} = 2{,}5 \text{ m/s}^2.$



Transformările lui Galilei

Pentru a descrie riguros legătura dintre observațiile făcute în sisteme de referință diferite referitoare la mișcarea unui corp, mecanica clasică folosește **transformările lui Galilei.** Acestea stabilesc relațiile matematice dintre poziția, viteza și accelerația unui corp, măsurate în două sisteme de referință aflate în mișcare rectilinie și uniformă unul față de celălalt.

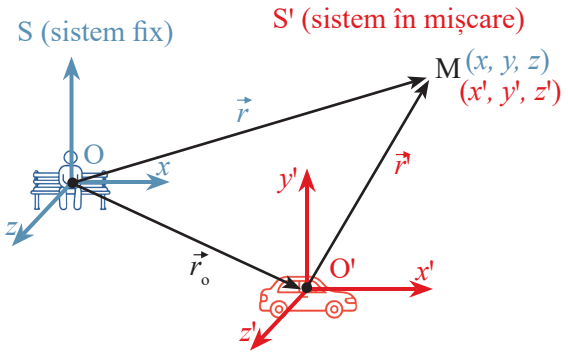


Fig. 3.1.10

Fie două sisteme de referință diferite: (S) – un sistem de referință fix și (S') – un sistem aflat în mișcare rectiline și uniformă în raport cu (S).

În cele două sisteme se află doi observatori ce urmăresc mișcarea unui punct material notat cu M (fig 3.2.23).

Poziția punctului material M este stabilită de vectorii de poziție $\vec{r}$ (față de O) și $\vec{r}'$ (față de O'). Poziția originii sistemului mobil (O') față de sistemul fix (O) este determinată de vectorul $\vec{r}_0$.

La un moment dat t, relația dintre cei trei vectori de poziție este:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \qquad (3.2.21)$$

Prin proiectarea relației (3.2.21) pe cele trei axe de coordonate și ținând cont că, în mecanica clasică, timpul este o mărime absolută, se obține un sistem de ecuații numit ***transformările lui Galilei.***

Pentru cele două sisteme de referință inerțiale S și S' care se deplasează cu viteza constantă u, de-a lungul axei Ox, transformările Galilei au forma:

$$x' = x - ut$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

unde:

– x, y, z, t sunt coordonatele și timpul în sistemul S;

– x', y', z', t' sunt coordonatele și timpul în sistemul S'.

La un moment următor t_1, datorită mișcării punctului M, relația dintre cei trei vectori de poziție devine:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{r}_1' \qquad (3.2.22.1)$$

Din diferența relațiilor (3.2.22) și (3.2.21), se obține:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}' \qquad (3.2.22.2)$$

În mecanica clasică, timpul „curge" la fel în sistemul de referință fix (S) și în sistemul de referință mobil (S') *deci, în mecanica clasică, timpul este o mărime absolută* ($\Delta t = \Delta t'$). De asemenea, *masa este o mărime absolută* (ea nu depinde de starea de repaus sau de mișcare a sistemului în care este măsurată, $m = m'$).

Împărțind relația (3.2.22) cu Δt, se obține:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} \qquad (3.2.23)$$

În relația (3.2.23) se stabilesc următoarele denumiri:

– $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = v_S$ – viteza față de S (*viteza absolută*);

– $\frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} = \vec{v}_{S'}$ – viteza față S' (*viteza relativă*);

– $\frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t} = \vec{u}$ – viteza lui S' față de S (*viteza de transport*).

Relația (3.2. 23) devine:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{u} \qquad (3.2.\ 23)$$

Relația (3.2. 23) reprezintă ***legea de compunere a vitezelor*** *în mecanica clasică.*

Reține

Viteza unui corp față de un sistem de referință S este suma vectorială dintre viteza corpului față de S' și viteza sistemului S' față de S.

sau:

Viteza absolută $(\vec{v}_S)$ este suma vectorială dintre viteza relativă $(\vec{v}_{S'})$ și viteza de transport $(\vec{u})$.

Dacă vitezele corpului M se modifică în timp și ținând cont că cele două sisteme S și S' sunt sisteme inerțiale (au viteze constante, deci accelerația lui S' față de S este nulă), din relația (3.2. 23), iar masa este o mărime absolută, se obține:

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{S'} \Rightarrow \vec{F}_S = \vec{F}_{S'} \qquad (3.2.\ 24)$$

Având în vedere că în mecanica clasică masa unui corp are aceeași valoare în orice sistem de referință, relația 3.2.24 arată că forțele au aceeași valoare în orice sistem de referință inerțial și deci *toate fenomenele mecanice decurg la fel în orice sistem de referință inerțial.*

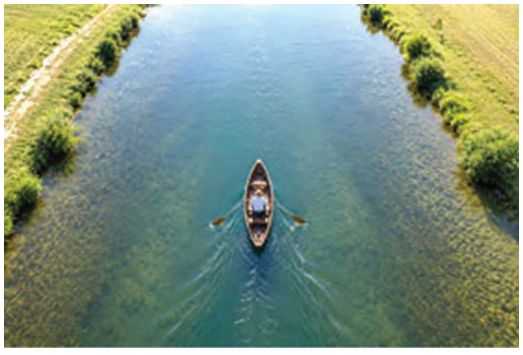
Reține

Legile mecanicii clasice newtoniene sunt invariante la transformările lui Galilei.

Principiul relativității în mecanică: *Toate legile mecanicii sunt aceleași în toate SR inerțiale.*

APLICĂ

1. Un râu curge cu viteza de 1 m/s, iar o barcă se deplasează cu viteza de 3 m/s față de apa râului, în sens contrar curgerii (fig. 3.1.11 a). Calculează viteza bărcii față de Pământ.



a) b)

Fig. 3.1.11

Rezolvare:

Etapa I: scrierea vectorială a legii de compunere a vitezelor

Am notat:

$\vec{v}_{bp}$ – viteza bărcii față de pământ;

$\vec{v}_{ba}$ – viteza bărcii față de apă;

$\vec{v}_{ap}$ – viteza apei față de pământ (viteza de curgere a râului)

Pentru scrierea corectă a relației vectoriale este util să folosești schema din fig. 3.1.12.

$$\vec{v}_{bp} = \vec{v}_{ba} + \vec{v}_{ap} \qquad (3.2.25)$$

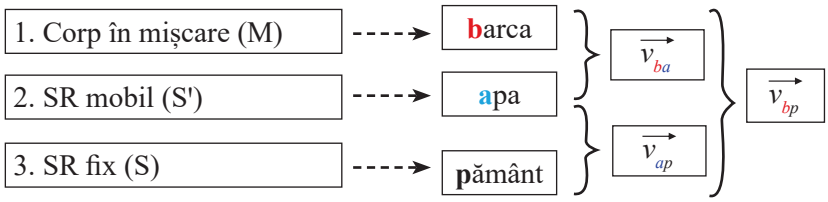


Fig. 3.1.12

Observații:

– Relația (3.2.25) reprezintă forma particulară a relației (3.2.23) pentru situația descrisă în această problemă.

– Folosește schema din fig. 3.2.24 scriind totdeauna noțiunile din stânga în această ordine, de sus în jos, și vei găsi relația vectorială corectă.

Etapa II: reprezintă vectorii conform relației (3.2.25) folosind și un sistem de axe de coordonate (fig. 3.2.23 b).

Etapa III: scrie relația dintre modulele vitezelor folosind sensul pozitiv al axei *Oy*:

$$v_{bp} = v_{ba} - v_{ap} \qquad (3.2.26)$$

$$v_{bp} = 2\,\text{m/s}$$

2. Un râu curge cu viteza de 1,5 m/s și un barcagiu vrea să traverseze râul vâslind perpendicular pe maluri cu viteza de 3 m/s față de apa râului. Barca va fi deplasată de apa râului pe o distanță d, în jos, paralel cu malurile (fig.3.2.25 a)). Știind că râul are lățimea de $L = 50$ m, calculează distanța d.

Rezolvare:

$AC = L = 50$ m; $BC = d = ?$

Folosind notațiile din problema precedentă și schema din fig. 3.1.13, putem scrie relația vectorială dintre viteze:

$$\vec{v}_{bp} = \vec{v}_{ba} + \vec{v}_{ap} \qquad (3.2.27)$$

În fig. 3.2.25 b) sunt reprezentați vectorii.

Folosind cunoștințe geometrice, obținem:

$$\Delta ABC \sim \Delta \text{ vitezelor} \Rightarrow \frac{BC}{v_{ap}} = \frac{AC}{v_{ba}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{v_{ap}} = \frac{L}{v_{ba}} \Rightarrow d = \frac{L \cdot v_{ap}}{v_{ba}} = 25\,\text{m}$$

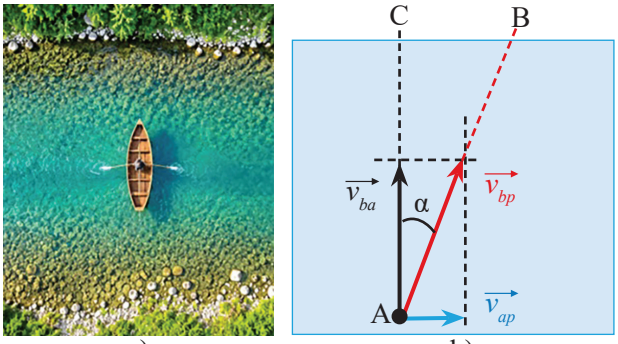


Fig. 3.1.13

3. Un autoturism se deplasează pe o șosea orizontală în timpul ploii. Picăturile de ploaie cad vertical (fig. 3.1.14 a) și sunt supuse unei forțe de rezistență a aerului proporțională cu pătratul vitezei. La un moment dat, picăturile au viteza $v = 15$ m/s și accelerația $a = 7{,}5$ m/s^2.

În apropierea suprafeței Pământului, picăturile ating viteza limită v_0. Din cauza deplasării automobilului, pe geamul lateral al acestuia urmele lăsate de picături sunt înclinate cu unghiul față de verticală (fig. 3.1.14 b).

Calculează:

a) viteza picăturii de ploaie în apropierea pământului;

b) viteza automobilului ($g = 10$ m/s^2).



Fig. 3.1.14

Rezolvare:

a. Conform informațiilor din textul problemei, forța de rezistență ce acționează asupra unei picături este $F_r = kv^2$.

La începutul mișcării picăturii (fig 3.1.15 a):

$$G - F_r = ma \Rightarrow mg - kv^2 = ma \Rightarrow k = \frac{m(g-a)}{v^2} \quad (3.2.28)$$

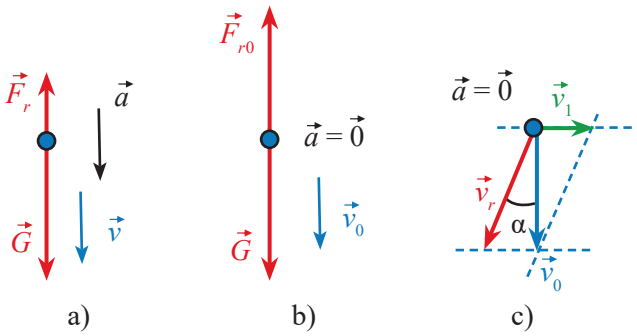


Fig. 3.1.15

În apropierea Pământului (fig 3.1.15 b):

$$G - F_{r0} = 0$$

$$mg = kv_0^2 \quad (3.2.29)$$

Folosind relațiile (3.2.28) și (3.2.29), obții:

$$v_0 = v\sqrt{\frac{g}{g-a}} = 30 \text{ m/s} \quad (3.2.30)$$

b. Analizează mișcarea picăturii față de sistemul de referință mobil legat de autoturism. Urma lăsată de o picătură pe geamul autoturismului corespunde vitezei relative v_r (fig. 3.1.15 c).

Conform legii de compunere a vitezelor:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_r + \vec{v}_1$$

Analizând fig. 3.2.27 c, se obține relația:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v_1}{v_0} \Rightarrow v_1 = v_0 \cdot \text{tg}\,\alpha = 17{,}3 \text{ m/s}$$

EXERSEAZĂ

1. Distanța dintre două porturi este de 80 km. O șalupă parcurge această distanță în 4 ore atunci când se deplasează în sensul curentului apei și în 8 ore atunci când merge împotriva curentului. Viteza șalupei față de apă rămâne aceeași în ambele situații. Se cere să se determine:

a) viteza curentului apei;

b) viteza șalupei față de apă;

c) timpul necesar pentru ca apa să transporte șalupa între cele două porturi dacă motorul acesteia nu funcționează.

2. Un avion parcurge distanța totală, dus-întors, de 200 km, având viteza de 200 m/s față de aer. Viteza vântului este de 20 m/s. Determină durata zborului în următoarele situații.

a) vânt perpendicular pe direcția de deplasare;

b) vânt în aceeași direcție cu deplasarea;

c) fără vânt.

3. O barcă înaintează spre Vest, de-a lungul Ecuatorului, cu viteza de 10 m/s. Vântul suflă dinspre S-V cu viteza $v_0 = 10$ m/s. Determină:

a) mărimea vitezei vântului față de barcă;

b) unghiul format de direcția vitezei vântului față de barca cu direcția E-V.

3.2 Interacțiuni prin contact

3.2.1 Forțe de apăsare, forțe de frecare

Atunci când un corp este în contact cu o suprafață și acționează asupra suprafeței cu o forță de apăsare, apar forțe perechi, acțiune-reacțiune. *Forța de apăsare normală* pe suprafață ($\vec{F}_{apăsare}$) și forța cu care suprafața împinge corpul *numită normală* ($\vec{N}$). Cele două forțe au aceeași direcție, aceeași mărime și sens contrar ($\vec{F}_{apăsare} = -\vec{N}$), fig. 3.2.1.

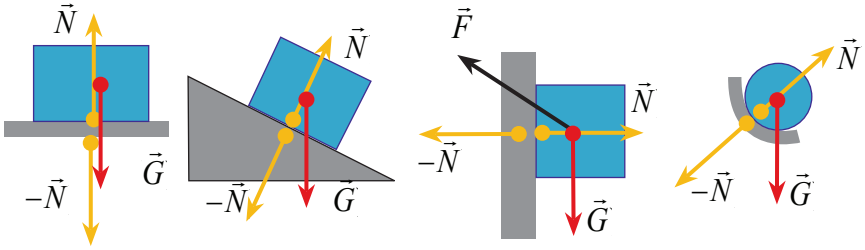


Fig. 3.2.1

Normala și forța de apăsare apar datorită contactului dintre corpuri, sunt perpendiculare pe suprafața de contact, dar acționează asupra unor corpuri diferite: $\vec{N}$ acționează asupra corpului iar $\vec{F}_{apăsare} = -\vec{N}$ acționează asupra suprafeței de sprijin.

Mărimea normalei depinde de *greutatea corpului*, de *orientarea suprafeței de contact* și de *prezența unor forțe exterioare* ce acționează asupra corpului.

Reține

Orice corp este atras de Pământ cu o forță numită *forță de greutate* sau forță de atracție gravitațională (fig. 3.2.2).



Fig. 3.2.2

Într-un punct de pe Pământ, greutatea (fig. 3.2.2) are:

- punctul de aplicație: centrul de greutate al corpului;
- direcția: verticala locului;
- sensul: în jos;
- mărimea greutății se calculează din relația:

$$G = mg \qquad (3.2.1)$$

→ m este masa corpului ($[m]_{SI}$ = kg)

→ g este accelerația gravitațională ($[g]_{SI}$ = m/s²).



Fig. 3.2.3

La suprafața Pământului, accelerația gravitațională variază între 9,78 m/s² la Ecuator și 9,83 m/s² la Poli. Se consideră g = 9,8m/s² (pentru ușurarea unor calcule, se acceptă g = 10 m/s²).

Reacțiunea greutății ($-\vec{G}$) este forța ce acționează asupra Pământului din partea corpului considerat (fig. 3.2.3).

Forța de frecare

La suprafața de contact dintre două corpuri pot apărea:

- forța de frecare statică (aderența) – atunci când cele două corpuri aflate în contact sunt în repaus relativ unul față de celălalt;
- forța de frecare la alunecare (cinetică) – atunci când există o mișcare relativă a unui corp față de celălalt corp cu care este în contact.

În fig. 3.2.4 sunt arătate situațiile în care apar forțe de frecare statice și forțe de frecare la alunecare.



Fig.3.2.4a. Corp în repaus față de suprafață

• fig. 3.2.4.a) – dacă forța de tracțiune $(\vec{F}_1)$ este mică, corpul rămâne în repaus și apare o *forța de frecare statică*. În acest caz:

$$F_1 = F_{st\,1} \qquad (3.2.2)$$



Fig. 3.2.4b. Corp în repaus față de suprafață

• fig. 3.2.4b – pe măsură ce crește forța de tracțiune, crește și forța de frecare statică, corpul rămânând în repaus. *Există o forță de frecare statică maximă* pentru care corpul rămâne în continuare în repaus pe suprafața de sprijin.

$$F_2 = F_{st\,max} \qquad (3.2.3)$$



Fig. 3.2.4c. Corp în mișcare față de suprafață

• fig. 3.2.4.c) – dacă forța de tracțiune depășește forța de frecare statică maximă, corpul începe să se miște și apare forța de frecare la alunecare $(\vec{F}_f)$ (forța de frecare cinetică) între corp și suprafața de sprijin.

• Forța de frecare la alunecare rămâne constantă și odată cu creșterea forței de tracțiune accelerația corpului crește conform principiului fundamental al mecanicii newtoniene.

$$F_3 > F_{st\,max} \text{ și } \vec{a} = \frac{\vec{F}_{rez}}{m} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_f}{m} \qquad (3.2.4)$$

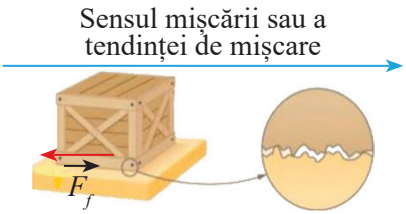


Fig. 3.2.5

Forța de frecare apare din cauză că există mici denivelări între suprafețele aflate în contact care se întrepătrund. Acestea se opun deplasării corpurilor unul față de celălalt (fig. 3.2.5).

Suprafața de contact dintre două corpuri se caracterizează printr-o *mărime fizică adimensională numită coeficient de frecare.* Există *coeficient de frecare la alunecare* (cinetic) (μ) și *coeficient de frecare static* (μ_s). În general, $\mu < \mu_s$

În tabelul alăturat sunt date câteva valori pentru μ și μ_s.

Natura suprafețelor de contact	μ_s	μ
Sticlă-sticlă	1	0,4
Cauciuc-beton	1	0,7
Oțel-oțel	0,75	0,57
Piele-lemn	0,61	0,52
Lemn-lemn	0,58	0,40
Oțel-lemn	0,5	0,3

Reține

Forța de frecare este totdeauna tangentă la suprafața de contact și opusă vitezei relative sau tendinței de mișcare a unui corp față de celălalt (are direcția vitezei și sens contrar ei).

• Forța de frecare statică (aderența) este egală și de sens contrar forței de tracțiune până la o valoare maximă $F_{s\,max} = \mu \cdot N$ (3.2.5)

Dacă forța de tracțiune depășește $F_{s\,max}$, începe alunecarea.

• Coeficientul de frecare (μ sau μ_s) și mărimea forței de frecare (F_f sau F_s) depind de natura suprafețelor aflate în contact și de gradul lor de prelucrare.

• Graficul dependenței dintre forța de frecare (F_f) și forța de tracțiune (F) este reprezentat în fig. 3.2.6.

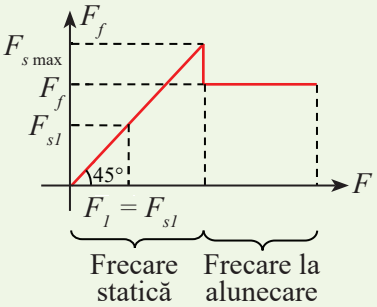


Fig. 3.2.6

Legile frecării la alunecare

1. Mărimea forței de frecare la alunecare nu depinde de mărimea suprafeței de contact.

2. Forța de frecare la alunecare (cinetica) este proporțională cu forța de apăsare normală exercitată de corp asupra planului.

$$F_f = \mu \cdot N \qquad (3.2.6)$$

Unghiul de frecare (φ)

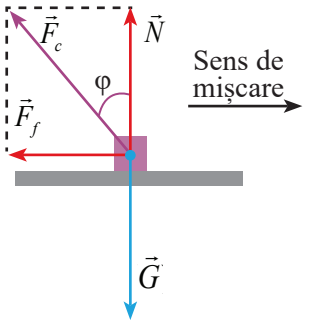


Fig. 3.2.7

Forța de contact $(\vec{F}_c)$ este rezultanta dintre $\vec{N}$ și $\vec{F}_f$ (fig.3.2.7)

$$\vec{F}_c = \vec{N} + \vec{F}_f \qquad (3.2.7)$$

Din fig. 3.2.7 se vede că:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{F_f}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu \qquad (3.2.8)$$

Coeficientul de frecare este tangenta unghiului dintre $\vec{N}$ și $\vec{F}_f$.

Considerăm un plan înclinat de unghi φ pe care alunecă un corp cu viteză constantă (fig. 3.2.8). În acest caz:

$$G_t = F_f \Rightarrow mg \sin\varphi = \mu N \qquad (3.2.9)$$

$$N = G_n = mg\cos\varphi \qquad (3.2.10)$$

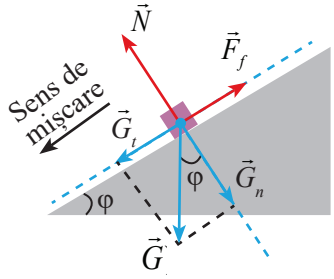


Fig. 3.2.8

Obținem:

$$mg\sin\varphi = \mu mg\cos\varphi \Rightarrow \mu = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tg}\,\varphi \qquad (3.2.11)$$

Reține

• Conform relației (3.2.8), coeficientul de frecare la alunecare reprezintă tangenta unghiului dintre forța de contact și normala la suprafața de contact (fig. 3.2.7).

• Conform relației (3.2.11), coeficientul de frecare la alunecare este egal cu tangenta unghiului planului înclinat pe care corpul alunecă uniform (cu viteză constantă) (fig. 3.2.8).

• Cele două interpretări de mai sus pentru coeficientul de frecare la alunecare sunt echivalente.

• φ se numește **unghi de frecare**.

Pentru curioși:

În secolul al XVII-lea, Robert Boyle a demonstrat experimental diferența dintre căderea corpurilor în aer și căderea lor în vid, folosind o pană și o monedă. Astfel, el a evidențiat existența forței de rezistență a aerului (forța de frecare cu aerul), care influențează mișcarea corpurilor. Această forță depinde de viteza corpurilor și de forma lor. Ai văzut că sportivii care se deplasează cu viteze mari dau o anumită formă corpului lor pentru micșorarea forței de rezistență a aerului. De exemplu, la proba de patinaj viteză, sportivii țin mâinile la spate exact în acest scop.



Fig. 3.2.9

STUDIU: Prezintă exemple din viața cotidiană sau din tehnică ce evidențiază preocuparea pentru reducerea forței de rezistență a aerului.

EXPERIMENTEAZĂ: Determinarea coeficientului de frecare la alunecare între diferite materiale.

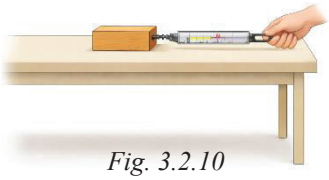


Fig. 3.2.10

Scopul lucrării: determinarea valorilor coeficientului de frecare la alunecare pentru diferite materiale aflate în contact și compararea valorilor obținute.

Materiale necesare: suprafață orizontală (masă), corp cu bază plană și cu posibilitate de prindere (cârlig) pe o față laterală, suprafețe diferite (carton, plastic, cauciuc, hârtie abrazivă)

Noțiuni teoretice:

Corpul fiind agățat de dinamometru în poziție verticală (fig. 3.2.11a): $G = F_1$ (3.2.12)

Pe masa orizontală (fig. 3.2.11b): $N = G = F_1$ (3.2.13)

Corpul fiind în mișcare rectilinie și uniformă pe masa orizontală (fig. 3.2.11b):

$$F_f = F_2 \quad (3.2.14)$$

Conform legii frecării la alunecare:

$$F_f = \mu \cdot N \Rightarrow \mu = \frac{F_f}{N} \Rightarrow \mu = \frac{F_2}{F_1} \quad (3.2.15)$$

Modul de lucru:

– Agață corpul de dinamometru în poziție verticală și se citește forța indicată de dinamometru (F_1) (fig. 3.2.11.a);

– Pune corpul pe masa orizontală și se prinde de el un dinamometru (fig. 3.2.11.b);

– Trage încet de dinamometru, aflat în poziție orizontală, astfel încât corpul să aibă o mișcare rectilinie și uniformă;

– Citește indicația dinamometrului în timpul mișcării corpului, acesta va indica forța (F_2) (fig. 3.2.11.b);

– ATENȚIE! Nu citi indicația dinamometrului exact în momentul începerii mișcării corpului, ci numai după ce mișcarea a început și este uniformă;

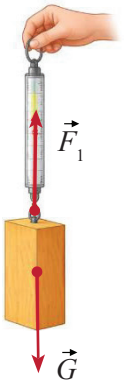


Fig. 3.2.11a

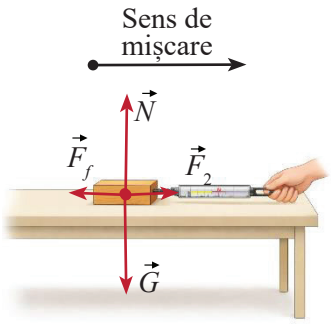


Fig. 3.2.11b

– Repetă experimentul fixând sub corp și pe corp foi din diferite materiale.

Tabel de date experimentale:

Notează natura suprafețelor aflate în contact (lemn pe plastic, lemn pe hârtie, hârtie pe hârtie etc.)

Nr. det.	F_1/N	F_2/N	$\mu = \frac{F_2}{F_1}$	$\overline{\mu}$	$\Delta\mu$	$\overline{\Delta\mu}$
1	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…

$\mu = \overline{\mu} \pm \overline{\Delta\mu}$

Nr. det.	Natura materialelor în contact	$\overline{\mu}$
1	Lemn-pal	…
…	…	…

Concluzie:
Coeficientul de frecare la alunecare depinde de natura suprafețelor aflate în contact.

Surse de erori:
– planul pe care stă corpul nu este perfect orizontal;
– măsurarea forței F_2 nu este făcută în timpul unei mișcări uniforme;
– suprafața de contact nu este perfect plană;
– mărimea forței F_2 nu este citită cu precizie atunci când dinamometrul indică o valoare în interiorul diviziunii celei mai mici a scalei. De obicei, în acest caz, se aproximează ½ din diviziunea minimă a scalei.

3.2.2 Forța deformatoare. Legea lui Hooke. Forța elastică. Tensiunea mecanică.

Forța deformatoare este forța exterioară aplicată unui corp care produce modificarea formei sau dimensiunii corpului.

Sub acțiunea forței deformatoare, corpul poate suferi o deformare elastică (corpul revine la forma inițială după dispariția forței deformatoare) sau plastică (corpul nu revine la forma inițială după dispariția forței deformatoare).

Se efectuează un experiment cu ajutorul unei bare elastice cu lungimea inițială ℓ_0 și aria secțiunii transversale inițială S_0, asupra căreia acționează forța deformatoare $\vec{F}$. Se măsoară **deformarea absolută** a barei $\Delta\ell = \ell - \ell_0$. În experiment se pot modifica F, ℓ_0, S_0 și natura barei. Experimentul se realizează astfel încât $\Delta\ell < \ell_0$. În aceste condiții, se poare considera că aria secțiunii transversale S_0 rămâne constantă.

Reține
Experimental, se observă că:

• alungirea barei este direct proporțională cu mărimea forței deformatoare ($\Delta\ell \sim F$) (fig. 3.2.12) atunci când ℓ_0, S_0 și natura materialului barei nu se modifică;

• alungirea barei este direct proporțională cu lungimea sa inițială ($\Delta\ell \sim \ell_0$) atunci când F, S_0 și natura materialului barei nu se modifică (fig. 3.2.13);

• alungirea barei este invers proporțională aria secțiunii transversale $\left(\Delta\ell \sim \frac{1}{S_0}\right)$ atunci când F, ℓ_0 și natura materialului barei nu se modifică (fig. 3.2.14);

• alungirea barei depinde de natura materialului din care ea este făcută atunci când se păstrează constante ℓ_0, S_0 și F.

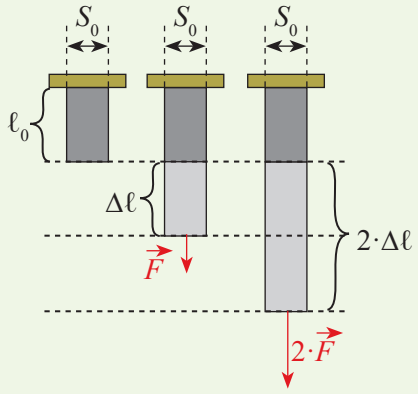


Fig. 3.2.12

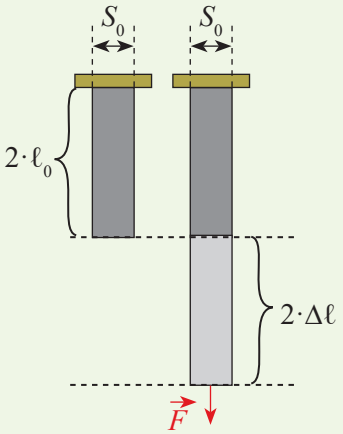


Fig. 3.2.13

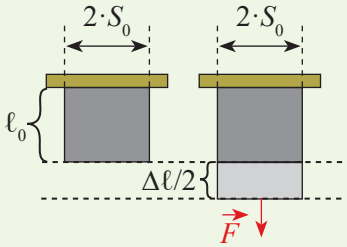


Fig. 3.2.14

În urma determinărilor experimentale efectuate, se poate scrie relația:

$$\Delta\ell = \frac{1}{E}\cdot\frac{F\cdot\ell_0}{S_0} \text{ sau } \frac{F}{S_0} = E\cdot\frac{\Delta\ell}{\ell_0} \qquad (3.2.16)$$

E este o constantă de material care se numește **modulul de elasticitate** longitudinal sau modulul lui Young.

$$[E]_{SI} = \frac{N}{m^2} = N\cdot m^{-2} \quad (3.2.17)$$

Reține

Folosind notațiile: $\sigma = \frac{F}{S_0}$ pentru **efortul unitar** și $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$, pentru **deformație relativă**, relația (3.2.16) se scrie:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon \qquad (3.2.18)$$

Relațiile (3.2.16) sau (3.2.18) reprezintă expresia matematică pentru **legea lui Hooke.**

Reține

Efortul unitar $\left(\sigma = \frac{F}{S_0}\right)$ este direct proporțional cu alungirea relativă $\left(\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}\right)$. Factorul de proporționalitate este modulul de elasticitate longitudinal (E).

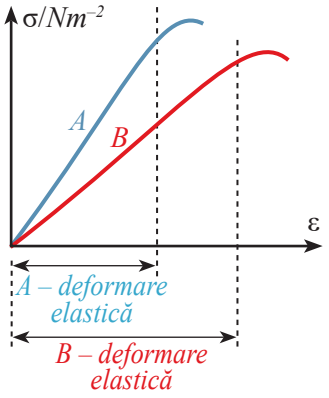


Fig. 3.2.15

Reține

Dependența liniară dintre efortul unitar (σ) și alungirea relativă (ε) se reprezintă printr-un segment de dreaptă ce trece prin origine. În fig. 3.2.15, graficele A și B corespund unor bare din materiale diferite. Legea lui Hooke este respectată numai pentru un interval de valori ale alungirii relative (în fig. 3.2.13). După deformarea elastică, bara se deformează plastic și apoi se rupe.

Pentru porțiunea de elasticitate, dacă forța deformatoare dispare, bara elastică revine la forma inițială. Acest lucru este posibil numai pentru că în interiorul barei apare o forță, **numită forță elastică ($\vec{F}_e$)**, care readuce bara la forma inițială, la lungimea inițială ℓ_0 (fig. 3.2.16)

Forța elastică este egală în modul cu forța care a produs deformarea ($F_e = F$), dar are sens contrar ei.

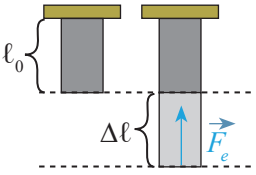


Fig. 3.2.16

Din relația (3.2.16), obținem:

$$F_e = \frac{E\cdot S_0}{\ell_0}\cdot\Delta\ell = k\cdot\Delta\ell \qquad (3.2.19)$$

unde $k = \frac{E\cdot S_0}{\ell_0}$ = constant, k se numește **constanta elastică** (a barei, a firului sau a resortului).

$$F_e = k\cdot\Delta\ell \qquad (3.2.20)$$

$$[k]_{SI} = \frac{N}{m} = N\cdot m^{-1}$$

Vectorial: $\vec{F}_e = -k\cdot\Delta\vec{\ell} = -k\cdot(\vec{\ell}-\vec{\ell}_0) = -k\cdot\vec{x}$ (3.2.21)

unde $\vec{x} = \Delta\vec{\ell} = \vec{\ell}-\vec{\ell}_0$ (3.2.22)

$\vec{x}$ are direcția resortului și sensul deformării.

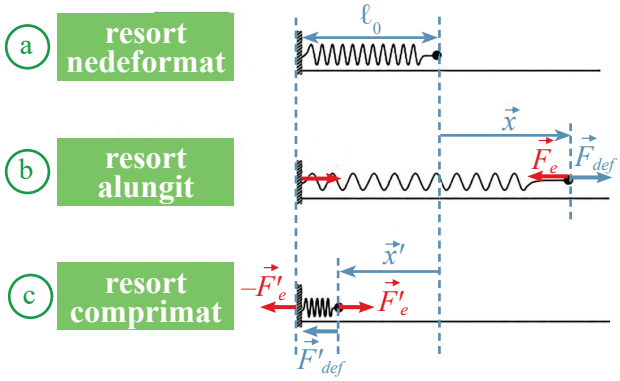


Fig. 3.2.17

Forța elastică care apare într-un resort este ilustrată în fig. 3.2.17. Această forță acționează la ambele capete ale resortului, așa cum este prezentat în figură.

Dependența forței deformatoare (F) și a forței elastice (F_e) de alungirea x a resortului, în limita de elasticitate, este redată în fig. 3.2.18.

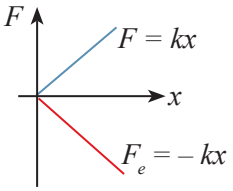


Fig. 3.2.18

EXPERIMENTEAZĂ: Determinarea constantei elastice a unui resort.

Scopul lucrării: determinarea experimentală a valorii constantei elastice a unui resort.

Materiale necesare: suport pentru experimente de laborator, resort, riglă, suport cu discuri crestate.

Noțiuni teoretice: Fie m_1 masa suportului de discuri și m' masa unui disc crestat.

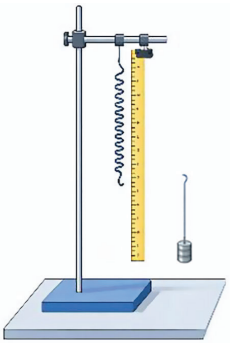
$m_2 = N \cdot m'$ unde N reprezintă numărul de discuri atașate pe suport.

Aplicând condiția de echilibru de translație (fig. 3.2.19), obținem:

$$F_e = G_1 + G_2 \Rightarrow kx = m_1 g + m_2 g$$

$$x = \ell - \ell_0$$

$$k = \frac{g \cdot (m_1 + N \cdot m')}{\ell - \ell_0} \quad (3.2.23)$$


Fig. 3.2.19

Modul de lucru:

- măsoară și notează lungimea resortului nedeformat (ℓ_0)
- citește și notează masa suportului de discuri (m_1) și masa unui disc (m')
- așază pe suport N discuri crestate
- agață suportul cu discuri crestate de resort
- măsoară lungimea resortului alungit după ce s-au atașat discurile crestate (ℓ)

Tabel de date experimentale:

Nr. det.	N	m'/kg	ℓ_0/m	ℓ/m	$x = (\ell - \ell_0)$/m	k/(N·m^{-1})	$\overline{k}$/(N·m^{-1})	Δk/(N·m^{-1})	$\overline{\Delta k}$/(N·m^{-1})
1									

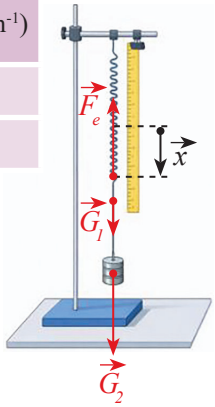


Fig. 3.2.20

Concluzii: valoarea constantei elastice se calculează din relația:

$$k = \overline{k} \pm \overline{\Delta k} \quad (3.2.24)$$

Surse de erori

– măsurările lungimilor ℓ și ℓ_0 pot fi afectate de erori;

– valorile maselor m_1 și m' sunt aproximative;

– valoarea accelerației gravitaționale la nivelul locului la care se fac determinările nu este cunoscută cu precizie.

Tensiunea în fir $(\vec{T})$ este o forță care apare într-un fir întins (tensionat) din cauza unei forțe exterioare ce acționează asupra firului $(\vec{F})$, fig. 3.2.21.

Reține

- tensiunea acționează în fir, are direcția firului și sensul spre interiorul firului.
- un fir ideal nu are masă și este inextensibil.
- tensiunea are aceeași valoare în orice punct al unui fir ideal.
- dacă firul are masă, tensiunea are valori diferite în diferite puncte ale firului.

$[T]_{SI} = \text{N}$ (3.2.25)

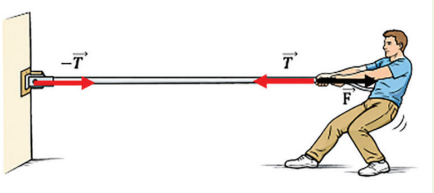


Fig. 3.2.21

APLICĂ



Fig. 3.2.22

1. Un om cu masa de 90 kg se află într-un lift care urcă cu accelerația de 2,2 m/s^2. Calculează forța de apăsare exercitată de om asupra podelei liftului.

Rezolvare:

$m = 90$ kg, $a = 2$ m/s^2, $N = ?$

Aplică *metoda diagramei corpului liber* (fig. 3.2.23). Metoda se aplică numai pentru *un corp aflat în mișcare de translație*, atunci când el poate fi reprezentat printr-un punct material.

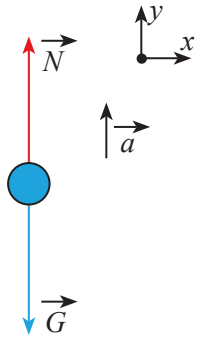


Fig. 3.2.23

Iată pașii pe care trebuie să îi parcurgi:

– reprezintă corpul studiat printr-un punct și forțele ce acționează asupra lui având originea în punctul respectiv;

– reprezintă vectorul accelerație lângă punctul considerat;

– alege convenabil un sistem de referință xOy;

– dacă este cazul, forțele se studiază după cele două axe.

După *Oy*:

$\vec{N} + \vec{G} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow N = mg = ma \Rightarrow \ N = m(g + a) \ \Rightarrow N = F_{ap} = 1080$ N.

2. Un corp cu masa $m_1 = 300$ g este așezat pe o masă netedă, fără frecări. De corp este prins un fir ideal, orizontal, ce trece peste un scripete ideal. În fir este inserat un resort de masa neglijabilă având constanta elastică $k = 100$ N/m (fig. 3.2.24). La celălalt capăt al firului este prins corpul de masa $m_2 = 200$ g (pentru accelerația gravitațională, folosește $g = 10$ m/s^2). Calculează:

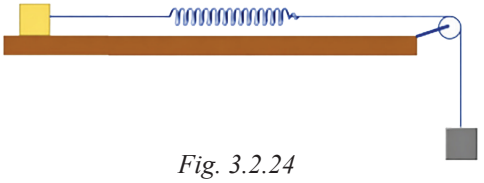


Fig. 3.2.24

a) accelerația sistemului; b) tensiunea din fir;

c) alungirea resortului; d) forța cu care scripetele apasă asupra axului său.

<u>Firul ideal</u> este inextensibil și cu masă neglijabilă. <u>Scripetele ideal</u> nu are inerție și frecările în lagăre sunt neglijabile. Scripetele schimbă convenabil direcția firului și a tensiunii din fir. Tensiunea în firul ideal ce trece peste scripetele ideal are aceeași valoare de o parte și de alta a scripetelui.

Rezolvare:

$m_1 = 300$ g $= 0{,}3$ kg, $m_2 = 200$ g $= 0{,}2$ kg, $a = ?$, $T = ?$

a) În fig. 3.2.25 sunt reprezentate vectorial toate forțele care acționează asupra fiecărui corp și accelerațiile corespunzătoare.

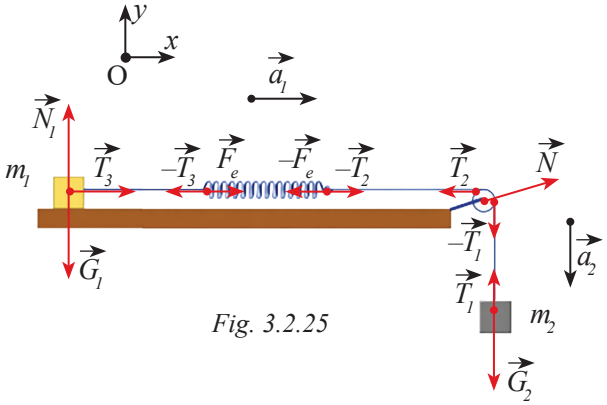


Fig. 3.2.25

Tensiunile în fire și accelerațiile scrise vectorial sunt diferite pentru că direcțiile vectorilor diferă. Aplicând principiul fundamental în cele două extremități ale resortului de masă nulă, obții:

$\vec{F}_e + (-\vec{T}_2) = \vec{0}$ sau $F_e = T_2$ și $-\vec{F}_e + (-\vec{T}_3) = \vec{0}$ sau $F_e = T_3$ (3.2.22)

Modulul accelerațiilor corpurilor este același: $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$. Știi că în orice punct al unui fir ideal valoarea tensiunii este aceeași, iar scripetele ideal nu modifică valoarea tensiunii, obții: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = |\vec{F}_e| = T$ (3.2.23)

Pentru ușurință, folosește modulele vectorilor pentru scrierea principiului fundamental.
Folosind relațiile de mai sus, obții:

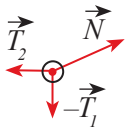


Fig. 3.2.26

(m_1): $T = m_1 a$ (3.2.24)

(m_2): $m_2 g - T = m_2 a$ (3.2.25)

Adună relațiile (3.2.24) și (3.2.25). Obții: $m_2 g = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = 4\,\text{m/s}^2$ (3.2.26)

b) Din (3.2.22) și (3.2.24), obții: $T = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \Rightarrow T = 1{,}2\ \text{N}$

c) Din (3.2.23) $\Rightarrow F_e = k \cdot \Delta x = T \Rightarrow \Delta x = \dfrac{m_1 m_2 g}{k(m_1 + m_2)} = 1{,}2\,\text{cm}$

Reține
Un resort (dinamometru) înseriat într-un fir ideal măsoară tensiunea din fir.

d) $F_{\text{apăsare}} = N$

$\vec{N} = (-\vec{T}_1) + \vec{T}_2$

Folosind și relația (3.2.23), obții: $N = T \cdot \sqrt{2} \cong 1{,}7$

3. O mașină tractează, prin intermediul a două cabluri, două lăzi încărcate cu materiale diferite și având masele $m_1 = 100$ kg, respectiv, $m_2 = 50$ kg. Tensiunea în cablul 1 este $F = 900$ N. Coeficientul de frecare dintre lăzi și suprafața orizontală este $\mu = 0{,}4$ pentru ambele lăzi. Calculează:
a) accelerația sistemului; b) tensiunea (T) în cablul 2 ($g = 10\ \text{m/s}^2$).

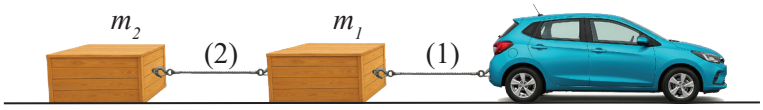


Fig. 3.2.27

Rezolvare:
$m_1 = 100$ kg, $m_2 = 50$ kg, $F = 900$ N, $\mu = 0{,}4$. a) $a = ?$ b) $T = ?$
Aplică *metoda diagramei corpului liber* (fig. 3.2.28).
a) Pentru (m_1):
După (Ox): $\vec{F} + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1 \cdot \vec{a} \Rightarrow F - F_{f1} - T = m_1 \cdot a$ (3.2.22)
$F_{f1} = \mu N_1$ (3.2.23)
După (Oy): $\vec{G}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0} \Rightarrow N_1 = G_1 = m_1 g$ (3.2.24)
Din relațiile (3.2.23) și (3.2.24), obții: $F_{f1} = \mu m_1 g$ (3.2.25)
Din (3.2.25) și (3.2.22), obții: $F - \mu m_1 g - T = m_1 \cdot a$ (3.2.26)
Pentru (m_2):
După Ox: $\vec{F}_{f2} + (-\vec{T}) = m_2 \cdot \vec{a} \Rightarrow T - F_{f2} = m_2 \cdot a$ (3.2.27)
Analog relației (3.2.25), obții: $F_{f2} = \mu m_2 g$ (3.2.28)
Din (3.2.22) și (3.2.23): $T - \mu m_2 g = m_2 \cdot a$ (3.2.29)
Adună relațiile (3.2.26) și (3.2.29). Obții:

$$F - \mu m_1 g - \mu m_2 g = m_1 a + m_2 a \Rightarrow a = \frac{F - \mu g \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \text{ și } a = 2\ \text{m/s}^2 \quad (3.2.30)$$

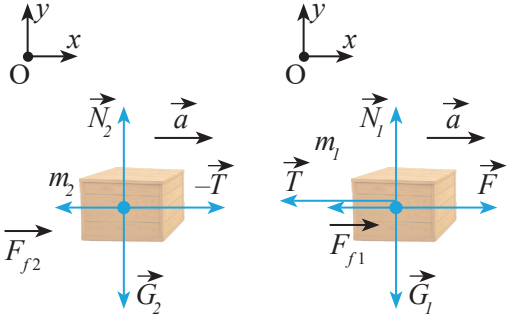


Fig. 3.2.28

b) Din (3.2.29) și aplicând (3.2.30), obții: $T = \mu m_2 g + m_2 \cdot a$ și $T = 300$ N.

4. Un om cu masa $m_1 = 70$ kg împinge o ladă cu masa $m_2 = 50$ kg pe o suprafață orizontală (fig. 3.2.29). Ansamblul om-ladă se deplasează cu accelerația $a = 2\text{m/s}^2$. Coeficientul de frecare dintre ladă și suprafață este $\mu_2 = 0{,}5$. Calculează: a) forța cu care omul împinge lada; b) coeficientul de frecare minim dintre talpa pantofilor și suprafața orizontală pentru ca omul să poată împinge lada. Se va considera $g = 10\ \text{m/s}^2$ și egalitatea dintre coeficientul de frecare static și dinamic.



Fig. 3.2.29

Rezolvare:

În fig. 3.2.30 sunt reprezentate toate forțele ce acționează asupra fiecărui corp din sistem, fără ca ele să fie notate. Cu aceeași culoare sunt desenate forțele acțiune-reacțiune.

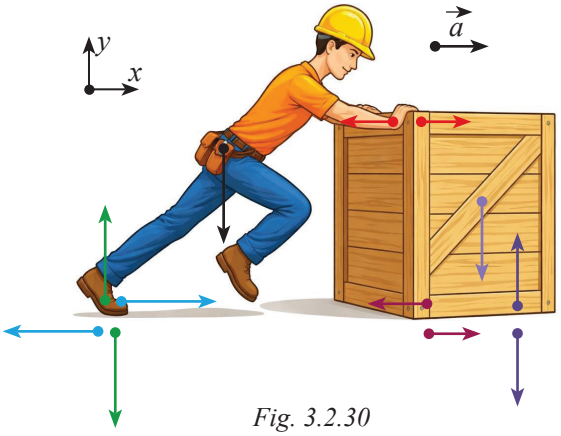


Fig. 3.2.30

În fig. 3.2.31 este aplicată metoda diagramei corpului liber. Fiecare corp este reprezentat printr-un punct împreună cu familia lui de forțe.

a) aplică principiul fundamental al mecanicii pentru ladă (fig. 3.2.32):

• pentru ladă, după axa *Ox*:

$\vec{F} + \vec{F}_{f2} = m_2 \cdot \vec{a} \Rightarrow F - F_{f2} = m_2 \cdot a$ (3.2.30)

unde $F_{f2} = \mu_2 N_2$ (3.2.31)

• ladă, după axa *Oy*

$\vec{N}_2 + \vec{G}_2 = \vec{0} \Rightarrow N_2 = G_2 = m_2 g$ (3.2.32)

Din relațiile (3.2.21) și (3.2.33):

$F_{f2} = \mu_2 m_2 g$ (3.2.34)

Efectuând calculele, obții:

$F = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g + m_2 \cdot a$

$F = 350$ N (3.2.35)

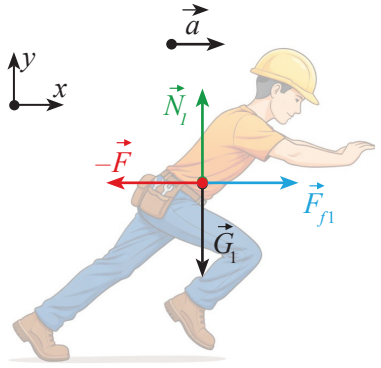


Fig. 3.2.31

b) Aplică principiul fundamental al mecanicii pentru om. Forța de frecare dintre talpa pantofilor și suprafața orizontală este *forță de frecare statică și ea este forță motoare*, forța care determină mișcarea omului (fig. 3.2.31):

• după axa *Ox*:

$\vec{F}_{f1} + (-\vec{F}) = m_1 \cdot \vec{a} \Rightarrow F_{f1} - F = m_1 \cdot a$ (3.2.36)

Analog relației 3.2.34:

$F_{f1} = \mu_1 m_1 g$ (3.2.37)

Efectuând calculele folosind relațiile (3.2.36) și (3.2.37), obții:

$$\mu_1 m_1 g - F = m_1 \cdot a \Rightarrow \mu_1 = \frac{m_1 \cdot a + F}{m_1 \cdot g} \Rightarrow \mu_1 = 0{,}7 \quad (3.2.38)$$

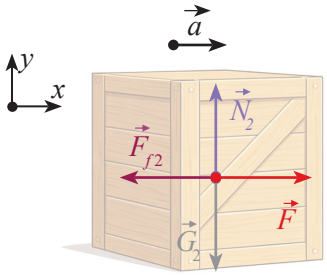


Fig. 3.2.32

5. Fie sistemul din fig. 3.2.33. Scripetele și firele sunt ideale. Se cunosc: masele $m = 4$ kg și $m_2 = 2$ kg și coeficientul de frecare dintre corpul de masă m și planul orizontal $\mu = 0{,}25$. Calculează valorile masei m_1 pentru care sistemul este în repaus.

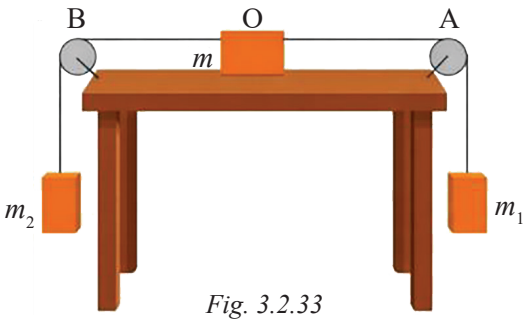


Fig. 3.2.33

Rezolvare:

Observații:

1. Pentru că nu se cunoaște masa m_1, nu se știe sensul de mișcare al corpurilor și nici sensul forței de frecare.

2. Corpul m este în repaus, deci tot sistemul este în repaus și toate accelerațiile sunt nule. Fig. 3.2.34 reprezintă o situație generală în care accelerațiile nu sunt nule.

3. $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_1'$ pentru că au direcții diferite. Dar $T_1 = T_1'$ pentru că ele sunt tensiuni ce apar în același fir ideal. De asemenea, $\vec{T}_2 \neq \vec{T}_2'$ dar $T_2 = T_2'$ pe baza aceluiași raționament.

4. În acest sistem există numai două valori diferite ale tensiunilor T_1 și T_2 corespunzătoare celor două fire de legătură (m_1-m și m_2-m).

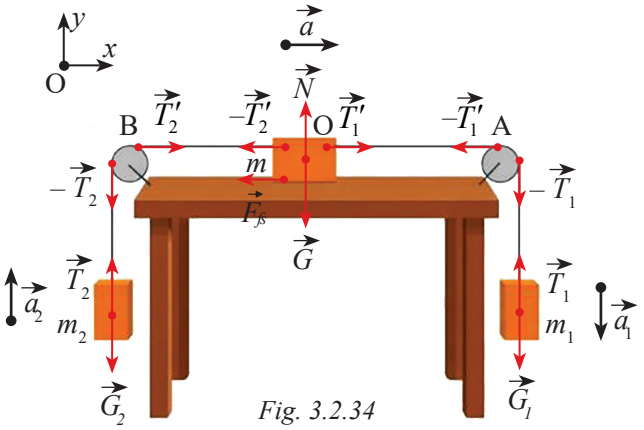


Fig. 3.2.34

Cazul I. Consideră *m* în repaus cu tendința de mișcare spre dreapta (fig. 3.2.34) și (fig. 3.2.35).

$$T_1 \geq T_2 \quad (3.2.39)$$

Între *m* și suprafața orizontală apare o <u>forță de frecare statică</u>. Folosim metoda corpului liber. În fig. 3.2.35 *este reprezentat fiecare corp din sistem cu familia lui de forțe. Aplicăm principiul fundamental pentru fiecare corp în parte.*

$$T_1 = G_1 = m_1 g \text{ și } T_2 = G_2 = m_2 g \quad (3.2.40)$$

Din relațiile (3.2.39) și (3.2.40) se deduce că în cazul I:

$$m_1 \geq m_2 \quad (3.2.41)$$

$$F_{fs} = T_1 - T_2 \Rightarrow F_{fs} = m_1 g - m_2 g \quad (3.2.42)$$

Dar: $F_{fs} \leq F_{fs\max}$; $F_{fs\max} = \mu N = \mu mg$ (3.2.43)

Din relațiile (3.2.42) și (3.2.43), se obține:

$$m_1 g - m_2 g \leq \mu mg \Rightarrow m_1 \leq m_2 + \mu m \quad (3.2.44)$$

Din (3.2.41) și (3.2.44) se deduce că pentru ca *m* să fie în repaus cu tendința de mișcare spre dreapta, trebuie ca:

$$m_2 \leq m_1 \leq m_2 + \mu m \quad (3.2.45)$$

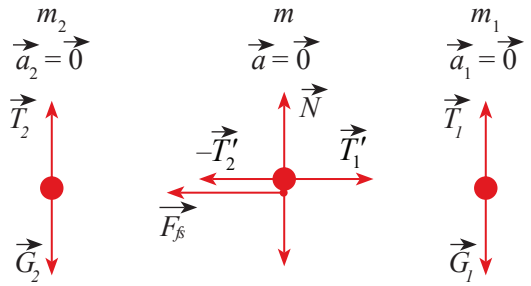


Fig. 3.2.35

Cazul II. Consideră *m* în repaus cu tendința de mișcare spre stânga (fig. 3.2.36).

Se schimbă sensul forței de frecare. Se folosește același raționament ca și în cazul I.

$$T_{11} \leq T_{12} \quad (3.2.46)$$

și $T_{12} = G_2 = m_2 g \quad (3.2.47)$

Folosind relațiile (3.2.46) și (3.2.47) în cazul II, se obține: $m_1 \leq m_2 \quad (3.2.48)$

$$T_{11} = m_1 g;\ F_{fs} = T_{12} - T_{11};\ T_{12} = m_2 g;$$

$$\Rightarrow F_{fs} = m_2 g - m_1 g \quad (3.2.49)$$

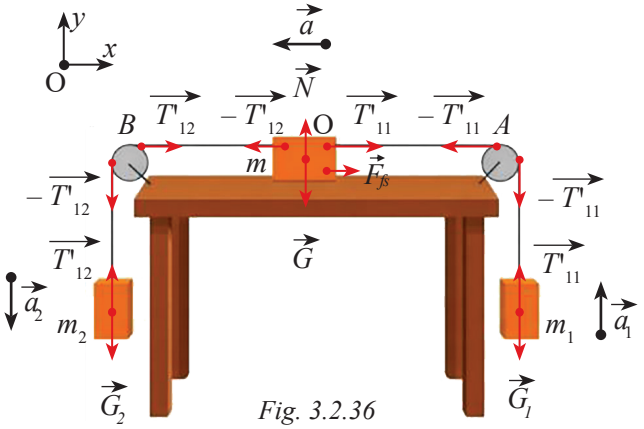


Fig. 3.2.36

Din relațiile (3.2.43) și (3.2.48), se obține:

$m_2 g - m_1 g \le \mu m g \Rightarrow m_2 g - m_1 g \le \mu m g$

$m_1 \ge m_2 - \mu m$ (3.2.50)

Din relațiile (3.2.48) și (3.2.50), se obține:

$m_2 - \mu m \le m_1 \le m_2$ (3.2.51)

Având în vedere că m trebuie să fie în repaus, indiferent de tendinita lui de mișcare, trebuie reunite relațiile (3.2.45) și (3.2.51). Se obține soluția finală:

$m_2 - \mu m \le m_1 \le m_2 + \mu m \Rightarrow 1\text{kg} \le m_1 \le 3\text{kg}$

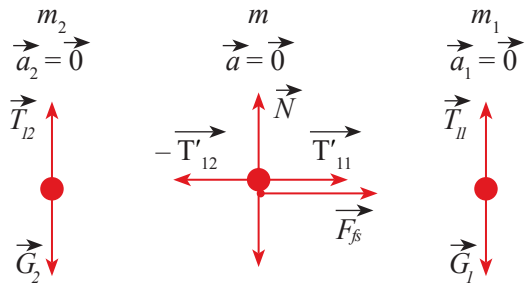


Fig. 3.2.37

6. Un corp cu masa $M = 7$ kg este așezat peste o scândură cu masa $m = 3$ kg. La rândul ei, scândura este așezată pe o masă orizontală (fig. 3.2.38). Coeficientul de frecare la alunecare dintre masă și scândură este $\mu_1 = 0{,}20$, iar între corp și scândură, $\mu_2 = 0{,}10$. Scândura este trasă cu o forță orizontală $F = c \cdot t$, unde $c = 3$ N/s. Se consideră $g = 10$ m/s^2 și coeficientul de frecare static egal cu coeficientul de frecare la alunecare. Reprezintă grafic accelerațiile corpului și scândurii pentru $t \in [0\text{s}; 11\text{s}]$.

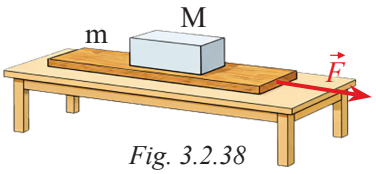


Fig. 3.2.38

Rezolvare:

În fig. 3.2.39 sunt reprezentate toate forțele ce acționează asupra corpurilor ce formează sistemul descris, iar în fig. 3.2.40 este reprezentată diagrama corpului liber pentru fiecare corp.

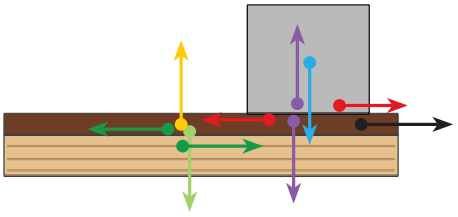


Fig. 3.2.39

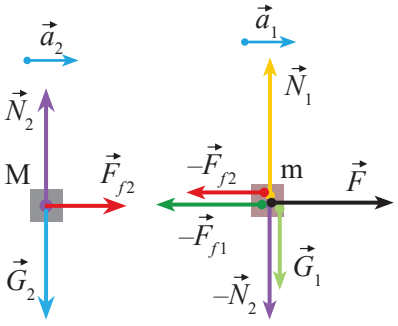


Fig. 3.2.40

I. Determină mai întâi valorile lui t_1 pentru care corpul alunecă pe scândură. Aplică principiul fundamental al mecanicii pentru fiecare corp în parte după cele două axe. Corpul și scândura au accelerații diferite atunci când corpul alunecă pe scândură.

Pentru M: După $Ox \Rightarrow F_{f2} = Ma_2$, unde $F_{f2} = \mu_2 N_2$.

După $Oy \Rightarrow N_2 = G_2 = Mg \Rightarrow F_{f2} = \mu_2 Mg$ (3.2.52)

Deci: $\mu_2 Mg = Ma_2 \Rightarrow a_2 = \mu_2 g$ (3.2.53)

Pentru m: După $Ox \Rightarrow F - F_{f1} - F_{f2} = ma_1$ (3.2.54)

După $Oy \Rightarrow N_1 = N_2 + G_1 \Rightarrow N_1 = Mg + mg \Rightarrow F_{f1} = \mu_1 g(M + m)$ (3.2.55)

Din relațiile (3.2.54), (3.2.52) și (3.2.55), rezultă:

$$F - \mu_2 Mg - \mu_1 g(M + m) = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{ct_1 - \mu_2 Mg - \mu_1 g(M + m)}{m} \qquad (3.2.56)$$

Pentru ca să apară alunecarea corpului față de scândură, trebuie ca:

$$a_1 \ge a_2 \qquad (3.2.57)$$

Din (3.2.57), (3.2.53) și (3.2.56):

$$\frac{ct_1 - \mu_2 Mg - \mu_1 g(M + m)}{m} \ge \mu_2 g \Rightarrow t_1 \ge \frac{g(M + m)(\mu_1 + \mu_2)}{c} \Rightarrow t_1 \ge 10\,\text{s} \qquad (3.2.58)$$

La momentul $t_1 = 10$ s începe alunecarea corpului pe scândură. Pentru $t \ge 10$ s, accelerațiile corpurilor se

determină folosind relațiile 3.2.56 și 3.2.57.

$$a_1 = (t-9)\,\text{m/s}^2 \text{ și } a_2 = 1\,\text{m/s}^2 \qquad (3.2.59)$$

II. Determină valorile t_2 pentru care corpul este în repaus față de scândură, iar aceasta alunecă pe masă. Între corp și scândură apare frecare statică, iar între scândură și masa apare frecare la alunecare. În relațiile de mai sus, F_{f2} devine F_{S2} și $a_1 = a_2 = a$. Relațiile devin:

$$F_{S2} = Ma\ ;\ F - F_{S2} - \mu_1 g(M+m) = ma \text{ și } F_{S2} \le \mu_2 Mg \qquad (3.2.60)$$

Se obține:

$$a \le \mu_2 g,\ t_2 \le \frac{g(M+m)(\mu_1+\mu_2)}{c} \Rightarrow t_2 \le 10\,\text{s} \qquad (3.2.61)$$

Din relațiile 3.2.60, se obține:

$$a = \frac{ct - \mu_1 g(M+m)}{M+m};\quad a = (0{,}3t - 2)\,\text{m/s}^2 \quad (3.2.62)$$

III. Determină valorile t_3 pentru care întreg sistemul este în repaus. În acest caz, ambele forțe de frecare sunt statice și $a = 0$. Se obține:

$$F_{S2} = 0,\ F - F_s = 0,\ F = F_{s1} \le \mu_1(M+m)g \Rightarrow t_3 \le \frac{\mu_1(M+m)g}{c},\ t_3 \le 6{,}67\,\text{s} \quad (3.2.63)$$

Conform rezultatelor de mai sus:

Pentru $t \in [0\,\text{s};\ 6{,}67\,\text{s}]$, ambele corpuri sunt în repaus: $a_1 = a_2 = 0$

Se obține:

– pentru $t \in [0\text{s};6{,}67\text{s}) \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$;

– pentru $t \in [6{,}67\text{s};10\text{s}) \Rightarrow a_1 = a_2 = a = (0{,}3t-2)\,\text{m/s}^2$;

– pentru $t \ge 10\,\text{s} \Rightarrow a_1 = (t-9)\,\text{m/s}^2$ și $a_2 = 1\,\text{m/s}^2$;

– pentru $t = 11$ s $\Rightarrow a_1 = 2$ m/s² și $a_2 = 1$ m/s².

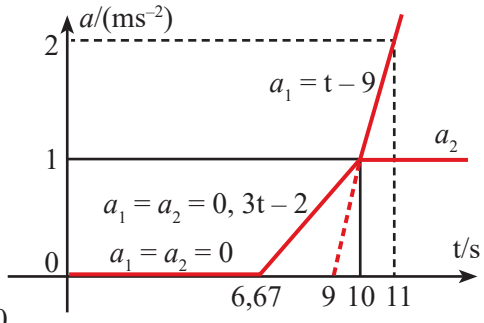


Fig. 3.2.41

7. Pe o suprafață orizontală, o mașină trage o ladă, cu masa de 100 kg, prin intermediul unui cablu cu lungimea de 5 m. Coeficientul de frecare dintre ladă și suprafață este 0,3 (g = 10 m/s²). Inițial, sistemul ladă-mașină se află în repaus și cablul este întins. După 5 s, viteza devine 54 km/h.



Fig. 3.2.42

a) Calculează forța de tracțiune ce apare în cablul ce leagă lada de mașină.

b) După 5, s cablul se rupe. Calculează distanța totală parcursă de ladă din momentul pornirii până la oprirea ei.

c) Șoferul observă ruperea cablului și în același moment, instantaneu, pune frână, astfel că, începând din acel moment, mașina frânează cu 0,5 m/s². Ce distanță va fi între ladă și mașină în momentul în care ambele sunt în repaus?

Rezolvare:

m = 100 kg; L = 5 m; μ = 0,3; t_1 = 5 s; v_1 = 54 km/h=15 m/s; a_2 = − 0,5 m/s²

a) F = ?; b) D = ?; c) d = ?

a. În fig. 3.2.43 este desenată diagrama forțelor pentru ladă.

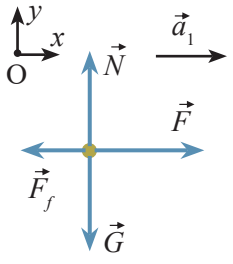


Fig. 3.2.43

Calculează accelerația lăzii după axa *Ox*:

$$a = \frac{v_1}{t_1} = 3\,\text{m/s}^2$$

$$F - F_f = ma$$

După *Oy*: $N = G = mg$ și $F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu mg$.

Se obține relația:

$$F = ma + \mu mg = 600 \text{ N}.$$

b. Distanța totală parcursă de ladă până la oprire este

$$D = x_1 + x_{1op} = v_{1med}t_1 + \frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{v_1}{2}t_1 + \frac{v_1^2}{2\mu g} = 75\,\text{m}$$

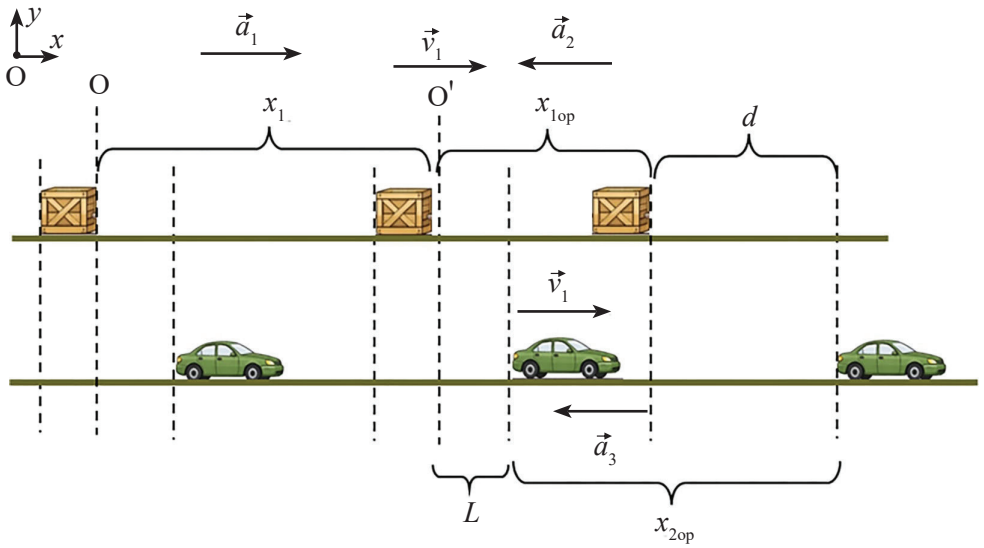


Fig. 3.2.43

c. Consideră noua origine poziția în care s-a rupt cablul (O') (fig. 3.2.32). Față de această poziție, lada se deplasează cu x_{1op}, iar mașina cu $(L + x_{2op})$. Distanța d dintre mașină și ladă, în momentul în care ambele sunt oprite, este:

$$d = L + x_{2op} - x_{1op} = L + \frac{v_1^2}{2a} - \frac{v_1^2}{2\mu g} = 192,5\,\text{m}.$$

EXERSEAZĂ

1. Două corpuri de mase $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 1$ kg, aflate pe un plan orizontal fără frecări, sunt legate printr-un fir. Calculează raportul tensiunilor din fir, dacă se trage cu o forță orizontală F de corpul m_1, și apoi de corpul m_2?

2. Un corp cu masa $m_2 = 1$ kg se află pe o suprafață orizontală netedă și este legat, prin intermediul unui fir orizontal, trecut peste un scripete ideal, de un corp cu masa m_1, suspendat vertical. Dacă reacțiunea din axul scripetelui este $R = 7{,}05$ N, calculează valoarea masei m_1 ($g = 10$ m/s^2).

3. Pe un plan orizontal cu frecare, se află un corp de masă $m = 1$ kg. Se variază înclinarea planului și se constată că atunci când aceasta face cu orizontala un unghi $\phi = 30°$, corpul alunecă uniform spre baza planului.

a. Reprezintă pe un desen toate forțele care acționează asupra corpului.

b. Calculează coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și plan, considerând că acesta rămâne constant pe întreaga lungime a planului.

c. Planul este readus în poziție orizontală, iar asupra corpului începe să acționeze o forță $\vec{F}$ ($F = 15$ N), orientată sub unghiul α față de orizontală. Calculează valoarea funcției sin α corespunzătoare situației în care corpul se desprinde de plan.

d. În condițiile punctului (c) în care unghiul sub care acționează forța $F = 10$ N este $\beta = 30°$, calculează accelerația corpului pe planul orizontal.

3.3. Dinamica mișcării circulare uniforme

Cum putem explica faptul că apa nu curge dintr-o găleată atunci când aceasta este rotită rapid pe o traiectorie circulară, în plan vertical? Cum de nu te prăbușești când ești cu capul în jos, în vârful unui roller-coaster, chiar dacă nu ai fi fixat cu bara de protecție? Oare observatorii aflați în sisteme de referință inerțiale, respectiv neinerțiale, explică aceste fenomene în același mod?

În această lecție vom răspunde la aceste întrebări studiind forța centripetă și forța centrifugă.

Forța centripetă

În mișcarea circulară uniformă, viteza mobilului este constantă ca valoare, dar își schimbă permanent direcția. Mobilul are o accelerație constantă ca modul, orientată permanent spre centrul traiectoriei circulare. Această accelerație este imprimată de o **forță rezultantă orientată spre centrul cercului, numită forță centripetă**.

Reține

Forța centripetă nu este un tip nou de forță; ea poate fi forța de atracție gravitațională, forța de frecare statică, tensiunea într-un fir, forța de apăsare normală, o forță elastică sau chiar rezultanta mai multor forțe.

În imaginile din figurile 3.3.1 și 3.3.2, am reprezentat forțele care determină mișcarea unui mobil pe traiectorie circulară.

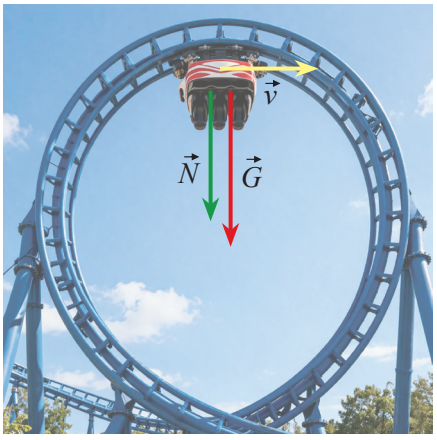


Fig. 3.3.1

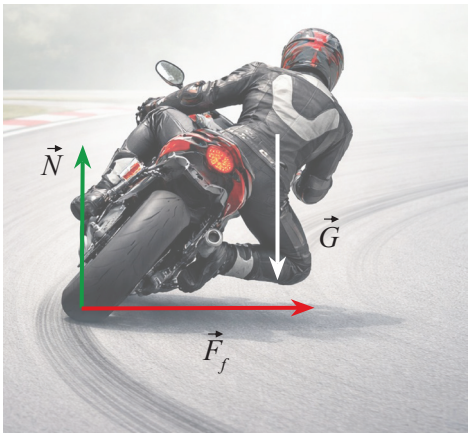


Fig. 3.3.2

În prima imagine, mișcarea circulară este imprimată de greutatea și de forța de reacțiune normală, iar în cea de a doua imagine, forța de frecare care acționează asupra motociclistului determină mișcarea circulară uniformă.

Reține

Expresia matematică a forței centripete este:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_{cp} &= m\vec{a}_n \\ \vec{a}_n &= -\omega^2\vec{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = -m\omega^2\vec{r} \qquad (3.3.1)$$

Modulul **forței centripete** este: $F_{cp} = m\omega^2 r$

Pentru exemplificare, să considerăm o platformă orizontală (fig. 3.3.3) care se rotește în jurul axei verticale centrale cu viteza unghiulară constantă ω.

De o tijă verticală, care coincide cu axa de rotație, este prins un fir ideal. La capătul liber al firului este fixat un corp de masă *m*. **În sistemul de referință inerțial** al observatorului aflat în repaus pe sol, traiectoria corpului de masă *m* este circulară, iar mișcarea corpului este circulară uniformă.

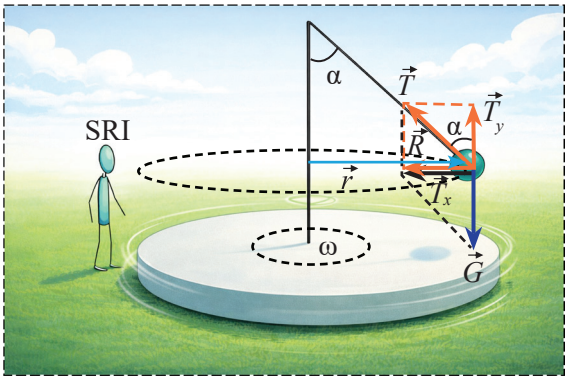


Fig. 3.3.3

Forța rezultantă ce acționează asupra corpului de masă m este:

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{G} \qquad (3.3.2)$$

Această forță rezultantă este **forța centripetă** ce imprimă **mișcarea circulară:**

$$\vec{R} = m\vec{a}_n$$

Proiectând relația 3.3.2 pe axa Ox, obținem:

$$\left.\begin{aligned} ma_n &= T_x \\ T_x &= T\sin\alpha \\ a_n &= \omega^2 r \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\omega^2 r = T\sin\alpha \qquad (3.3.3)$$

Forța centrifugă

Să analizăm mișcarea corpului de masă m, aflat în mișcare circulară uniformă față de Pământ, din perspectiva **observatorului aflat în repaus pe platforma** care se rotește cu viteză unghiulară constantă. **Sistemul de referință asociat acestui observator este neinerțial (SRN)**, deoarece el se mișcă accelerat față de Pământ, având accelerație normală. Față de acest observator, corpul de masă m este în repaus. Pentru a putea explica deviația firului de suspensie și repausul relativ al corpului, observatorul aflat **în sistemul de referință neinerțial (SRN)** introduce o forță complementară, de inerție, numită **forță centrifugă:**

$$\vec{F}_{cf} = +m\omega^2\vec{r} \qquad (3.3.4)$$

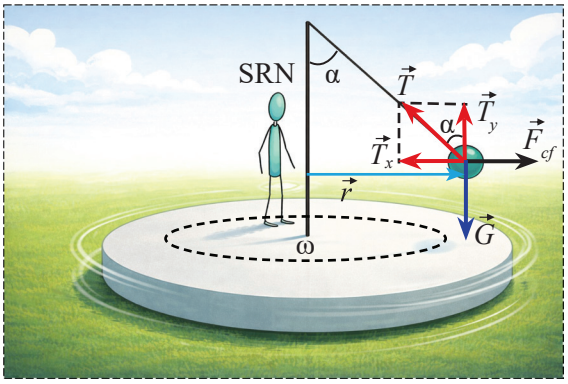


Fig. 3.3.4

În **sistemul de referință neinerțial,** corpul de masă m se va afla în repaus sub acțiunea tensiunii din fir, a greutății și a forței centrifuge:

$$\vec{0} = \vec{T} + \vec{G} + \vec{F}_{cf} \qquad (3.3.5)$$

Proiectând relația 3.3.5 pe axa Ox, obținem:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= T_x - F_{cf} \\ T_x &= T\sin\alpha \\ F_{cf} &= m\omega^2 r \end{aligned}\right\} \Rightarrow T\sin\alpha = m\omega^2 r \qquad (3.3.6)$$

relație analogă cu relația 3.3.2.

Reține

În sistemul de referință neinerțial solidar cu corpul, pentru a explica repausul relativ al acestuia, se introduce **o forță complementară, de inerție**, numită **forță centrifugă.**

PENTRU CURIOȘI:

Forța centrifugă nu este rezultatul interacțiunii dintre două corpuri, este un complement matematic introdus în sistemul de referință neinerțial pentru a explica echilibrul corpului în acest sistem de referință.

APLICĂ

1. Calculează frecvența minimă cu care trebuie rotit un cilindru de rază r = 1 m în jurul axei sale verticale, pentru ca un corp aflat pe peretele interior al cilindrului să rămână în repaus față de cilindru. Coeficientul de frecare între corp și cilindru are valoarea μ = 0,25, iar accelerația gravitațională se consideră g = 9,8 m/s^2.

Rezolvare:

În sistemul de referință inerțial, legat de Pământ, corpul se află în mișcare circulară uniformă sub acțiunea normalei exercitate de perete asupra corpului, a greutății corpului și a forței de frecare dintre perete și corp (fig. 3.3.5). La limita lunecării:

$$m\vec{a}_n = \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f \qquad (3.3.7)$$

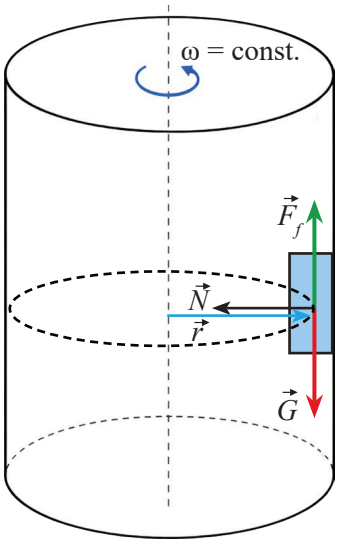


Fig. 3.3.5

Proiectând relația 3.3.7 pe axele *Ox* și *Oy*, obținem:

$$\left.\begin{aligned} &Ox: m\cdot a_n = N \\ &Oy: 0 = G - F_f \\ &F_f = \mu\cdot N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\mu\cdot m\cdot a_n = G \\ &G = m\cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\mu\cdot a_n = g \\ &a_n = \omega^2\cdot r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu\cdot\omega^2\cdot r = g$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu\cdot\omega^2\cdot r = g \\ &\omega = 2\pi\cdot\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu\cdot(2\pi\cdot\nu)^2\cdot r = g \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu\cdot r}} \cong 1\ \text{Hz}.$$

2. Discurile de pick-up din vinil au diametrul de 30 cm. Așezăm o monedă de mici dimensiuni (poate fi considerată punct material) la marginea unui disc. Calculează valoarea minimă a coeficientului de frecare la alunecare dintre disc și monedă astfel încât moneda să nu cadă de pe discul care se rotește cu turația $n = 33^1/_3$ rotații/min. ($g \approx \pi^2\ \text{ms}^{-2}$).

Rezolvare:

În sistemul de referință neinerțial, solidar cu discul de vinil, moneda este în echilibru relativ sub acțiunea forței de frecare, a normalei exercitate de placă, a greutății și a forței centrifuge de inerție:

$$\vec{0} = \vec{F}_f + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{cf} \qquad (3.3.8)$$

Proiectând relația 3.3.8 pe axele *Ox*, respectiv *Oy*, obținem:

$$\begin{aligned} &Ox: 0 = F_f - F_{cf} \\ &Oy: 0 = N - G \end{aligned} \qquad (3.3.9)$$

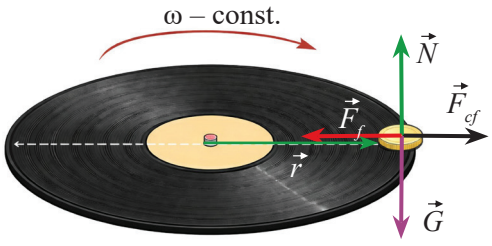


Fig. 3.3.6

Dar:

$$\begin{aligned} &F_f = \mu\cdot N \\ &F_{cf} = m\cdot\omega^2\cdot r \end{aligned} \qquad (3.3.10)$$

Înlocuind relațiile 3.3.10 în relațiile 3.3.9, obținem:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\cdot N = m\cdot\omega^2\cdot r \\ &N = G \\ &G = m\cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu\cdot m\cdot g = m\cdot\omega^2\cdot r \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\mu\cdot g = \omega^2\cdot r \\ &\omega = 2\pi\cdot\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu\cdot g = (2\pi\cdot\nu)^2\cdot r \Rightarrow \mu = \frac{(2\pi\cdot\nu)^2\cdot r}{g}$$

Transformăm unitățile de măsură în unități din Sistemul Internațional, înlocuim valorile numerice și efectuăm calculele:

$$D = 30\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{m}$$

$$n = 33{,}3\ \text{rot/min} \Rightarrow \nu = \frac{33{,}3}{60}\ \text{Hz} = 0{,}55\ \text{Hz}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \frac{4\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot r}{g} \\ &r = \frac{D}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu = \frac{2\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot D}{g} = 2\cdot(0{,}55)^2\cdot 0{,}3 \cong 0{,}18.$$

3. Un corp de masă m și de dimensiuni neglijabile este suspendat de un punct fix (fig. 3.3.7) prin intermediul unui fir de lungime L. În timp ce corpul descrie o traiectorie circulară în plan orizontal, firul de suspensie descrie pânza unui con cu deschiderea unghiulară 2θ. Accelerația gravitațională este g, iar viteza unghiulară este constantă în timpul rotației. Calculează perioada de rotație a corpului de masă m.

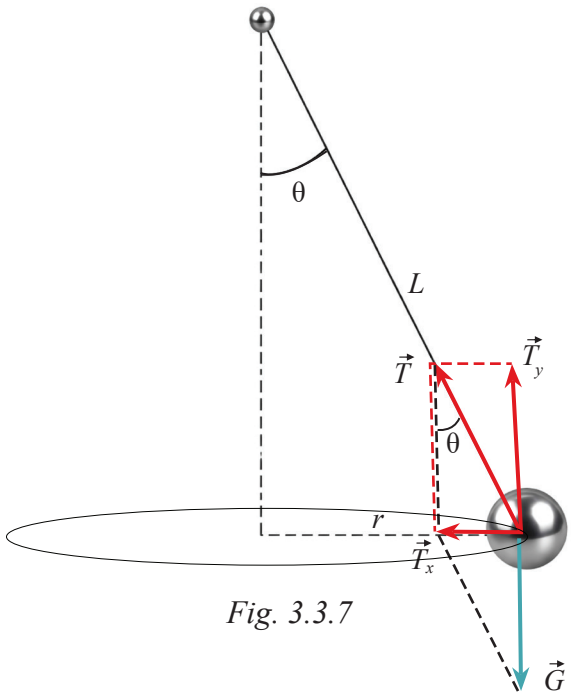


Fig. 3.3.7

Rezolvare:

Corpul efectuează o mișcare circulară uniformă sub acțiunea greutății și a tensiunii din fir. În sistemul de referință inerțial, legat de Pământ, putem scrie:

$$m\vec{a}_n = \vec{T} + \vec{G}$$

Proiectând această relație pe axele Ox și Oy, obținem:

$$\begin{aligned} &Ox:\ ma_n = T_x \\ &Oy:\ 0 = T_y - G \end{aligned} \qquad (3.3.11)$$

Din fig. 3.3.7, observăm că: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{T_x}{T_y}$.

Ținând cont de relațiile 3.3.1, putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\theta = \frac{ma_n}{G} \\ &a_n = \omega^2 r \\ &G = mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

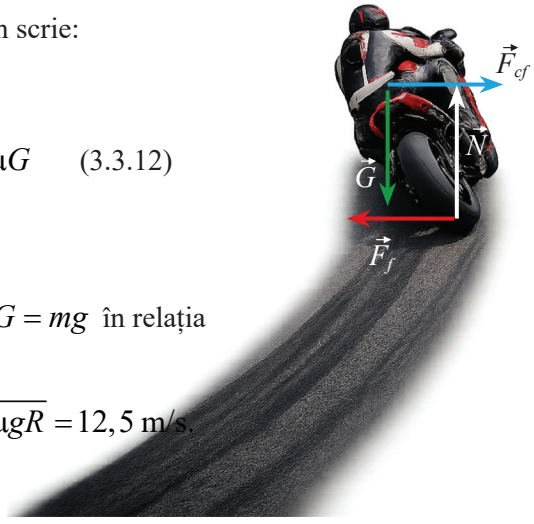
Cum: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ și $r = L\sin\theta$, obținem: $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{4\pi^2 L\sin\theta}{gT^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$.

4. Coeficientul de frecare la alunecare dintre anvelopele unei motociclete și șosea este 0,32. Calculează viteza maximă cu care trebuie să se deplaseze un motociclist în plan orizontal pentru a nu derapa într-un viraj cu raza de 5 m (g = 10 ms^{-2}).

Rezolvare:

În sistemul de referință neinerțial, legat de motociclist, putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{0} = \vec{F}_{cf} + \vec{F}_f + \vec{N} + \vec{G} \\ &Ox:\ 0 = F_{cf} - F_f \\ &Oy:\ 0 = N - G \\ &F_f = \mu N \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{cf} = \mu G \qquad (3.3.12)$$



Înlocuind expresiile matematice ale forțelor: $F_{cf} = \dfrac{mv^2}{R}$ și $G = mg$ în relația 3.3.12, obținem:

$$\frac{mv^2}{R} = \mu mg \Rightarrow v^2 = \mu gR \Rightarrow v = \sqrt{\mu gR} = 12{,}5\ \text{m/s}.$$

EXERSEAZĂ

1. Pentru a separa lichidele de solide, se plasează corpurile într-un cilindru perforat, plasat coaxial într-un vas mai mare, apoi se rotește cilindrul perforat. O astfel de metodă este folosită la uscătoarele mașinilor de spălat. Explică cum funcționează aceste uscătoare.

2. Identifică în viața cotidiană situații în care un corp se mișcă circular uniform sub acțiunea:
a. forței de frecare statice;
b. forței de apăsare normală;
c. rezultantei dintre greutate și tensiunea din fir.

3. Călătorii aflați într-un autobuz care virează brusc, sunt „azvârliți" către în afară. Un observator aflat în repaus pe sol (SRI) explică fenomenul astfel: podeaua și caroseria sunt deviate (se înscriu pe traiectoria circulară), în timp ce pasagerii tind să se miște rectiliniu uniform, în virtutea inerției. Scaunele exercită forțe care constrâng călătorii să descrie și ei traiectoria circulară. Explică acest fenomen din perspectiva unui observator aflat pe scaun, în autobuz. Folosește în explicația ta noțiunea de sistem de referință neinerțial.

4. Pentru a preîntâmpina solicitarea inegală a șinelor și chiar răsturnarea vagoanelor la curbe, la calea ferată, șina exterioară a curbei este supraînălțată. Arată că unghiul de supraînălțare nu depinde de masa vagoanelor, ci doar de raza traiectoriei și de viteza acestora.

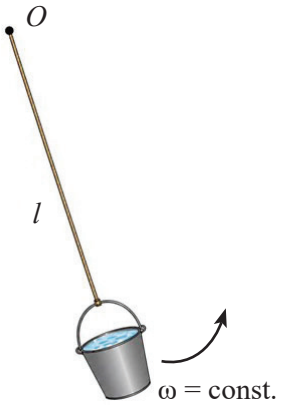
5. Un camion merge cu viteza $v = 15$ m/s pe un pod curbat în plan vertical, având raza $R = 100$ m. Calculează forța de apăsare normală exercitată de camion asupra podului:
a. în punctul superior, dacă podul are formă convexă;
b. în punctul inferior, dacă podul este concav.
(Masa camionului este $m = 5$ t, iar $g = 10$ m/s^2).

6. Pe un zid al morții, înclinat cu unghiul $\alpha = 45^o$ față de orizontală, se rotește un motociclist. Motociclistul descrie în plan orizontal un cerc de rază $R = 2$ m. Mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare dintre cauciucuri și zid este $\mu = 0{,}2$. Calculează viteza unghiulară a motociclistului ($g = 10$ m/s^2).

7. O piatră (considerată punct material) cu masa $m = 100$ g, legată de capătul unui fir inextensibil de lungime $L = 80$ cm, descrie o mișcare circulară uniformă în plan vertical. Viteza pietrei este $v = 4$ m/s. Calculează ($g = 10$ m/s^2):
a. tensiunea minimă din fir în timpul rotației;
b. tensiunea maximă din fir în timpul rotației.

8. O bilă de mici dimensiuni poate aluneca fără frecare pe suprafața exterioară a unei semisfere fixe, de rază R, aflată pe sol. Bila este lăsată să alunece din vecinătatea vârfului semisferei, cu viteză inițială nulă. În momentul desprinderii de semisferă, viteza bilei este v. Calculează înălțimea față de sol la care bila părăsește semisfera. Accelerația gravitațională este g.

9. O găleată mică, umplută cu apă, este legată de un fir inextensibil de lungime $l = 50$ cm. Găleata este rotită cu viteză unghiulară constantă într-un plan vertical. Calculează frecvența minimă cu care trebuie rotită găleata astfel încât apa să nu curgă din găleată în timpul rotației ($g = 10$ m/s^2).



3.4. Interacțiuni prin câmpuri: Interacțiunea gravitațională

3.4.1. Legea atracției gravitaționale

Corpurile aflate în aer, lăsate liber, cad spre Pământ. Aceeași forță care acționează asupra acestor corpuri acționează și asupra Lunii? Putem afirma că și Luna „cade" spre Pământ? Isaac Newton și-a pus aceste întrebări și a răspuns la ele, formulând legea atracției universale. În această lecție vei învăța cum anumite mărimi fizice influențează atracția dintre corpuri.

Legea atracției universale este o lege empirică și se postulează, asemenea principiilor mecanicii. Această lege se aplică corpurilor considerate punctiforme în raport cu distanța dintre ele. Noțiunea de corp punctiform poate fi extinsă chiar și la cele mai masive corpuri din Univers, dacă distanțele dintre ele sunt mult mai mari decât dimensiunile corpurilor. De exemplu, Soarele și Pământul pot fi considerate corpuri punctiforme, deoarece distanța dintre ele este de peste 100 de ori mai mare decât diametrul Soarelui.

Reține

Două corpuri considerate punctiforme față de distanța dintre ele **se atrag** cu o forță **direct proporțională cu produsul maselor** lor și **invers proporțională cu pătratul distanței** dintre ele:

$$F \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Aceasta este **legea atracției universale**, formulată de Newton, în 1687.

Se observă că valoarea forței de atracție este cu atât mai mare cu cât masele celor două corpuri sunt mai mari. Forța de atracție scade pe măsură ce crește distanța dintre corpuri.

Forțele reprezentate în fig. 3.4.1 sunt **direct proporționale cu produsul maselor** m_1, respectiv, m_2, și **invers proporționale cu pătratul distanței** dintre cele două corpuri. Modulele forțelor sunt egale (forțele sunt acțiune-reacțiune). Corpurile reprezentate pot fi considerate punctiforme față de distanța dintre ele.

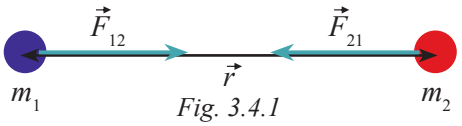


Fig. 3.4.1

Expresia matematică a forței *F* este:

$$F = K \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (3.4.1)$$

Constanta K este constanta atracției universale și are valoarea: $K = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

Această constantă a fost determinată experimental, pentru prima dată, de Henry Cavendish, în 1798, cu ajutorul unei balanțe de torsiune.

PENTRU CURIOȘI:

Vectorial, forța F poate fi scrisă astfel:

$$\vec{F} = -K \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (3.4.2)$$

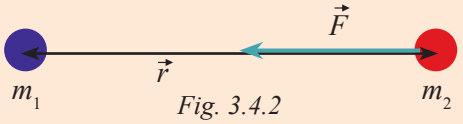


Fig. 3.4.2

PENTRU CURIOȘI:

Henry Cavendish a publicat, în 1798, lucrarea „Experimente pentru determinarea densității Pământului" – cunoscută în istorie ca experimentul în care „s-a cântărit" Pământul, deoarece dacă se cunosc densitatea medie și volumul Pământului, se poate determina masa sa. Abia mai târziu, fizicienii au reinterpretat acest experiment în cadrul Legii atracției universale și au realizat că, din măsurătorile efectuate, se poate calcula și constanta gravitațională K. În experimentul efectuat, Cavendish a folosit două sfere de plumb grele ($M \approx 158$ kg), fixate de o bară care se poate roti. Alte două bile mici de plumb

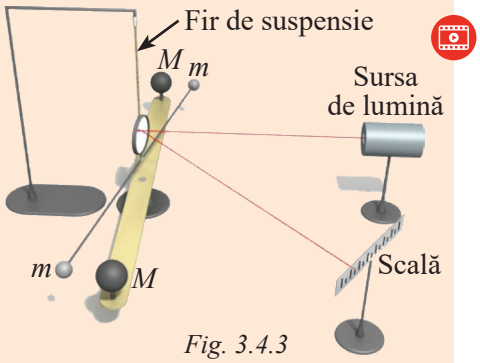


Fig. 3.4.3

($m \approx 0{,}75$ kg) erau fixate la capetele unei tije suspendate de un fir elastic foarte subțire (fig. 3.4.3). Apropierea sferelor de masă M de bilele mici produce o atracție gravitațională care produce, la rândul ei, o răsucire a firului de suspensie. Măsurând unghiul de răsucire, se poate determina forța de atracție și implicit valoarea constantei gravitaționale.

APLICĂ

1. Calculează forța cu care Pământul atrage Luna. Compară această forță cu forța cu care Pământul este atras de Lună. Se cunosc: constanta atracției universale – $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$, masa Pământului – $M_P \approx 9{,}57 \cdot 10^{24}$ kg, masa Lunii - $M_L \approx 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg și distanța Pământ-Lună – $d_{PL} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Rezolvare:
Conform Principiului acțiunii și reacțiunii, cele două forțe sunt egale ca valoare și de sens opus:

$$F_{PL} = F_{LP} = K \cdot \frac{M_P M_L}{d_{PL}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(3{,}84 \cdot 10^8)^2} = 1{,}98 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

2. Două mici bile identice, fiecare cu masa de 1 kg, sunt plasate la distanța de 1 m una de alta. Calculează forța de atracție gravitațională dintre ele (bilele pot fi considerate punctiforme față de distanța dintre ele). Compară valoarea acesteia cu greutatea uneia dintre bile ($g = 9{,}8$ m/s^2).

Rezolvare:
Aplicăm Legea atracției universale pentru cele două corpuri:

$$F = K \cdot \frac{m_1 m_2}{d_{PL}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} \text{ N} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N}.$$

Greutatea uneia dintre bile are valoarea: $G = m \cdot g = 1 \cdot 9{,}8$ N $= 9{,}8$ N.
Se poate observa ușor că forța de atracție dintre cele două corpuri este mult mai mică (neglijabilă) raportat la greutatea corpurilor. În acest caz, forța de atracție nu poate fi observată direct, ea fiind foarte greu de măsurat, doar cu aparatură extrem de sensibilă.

3. Calculează forța rezultantă exercitată de corpurile de masă m_1, respectiv, m_2, asupra corpului de masă m_3 (fig. 3.3.4). Corpurile pot fi considerate punctiforme raportat la distanțele d_1 și d_2 dintre ele. Se cunosc: valoarea constantei atracției universale, k, și unghiul α.

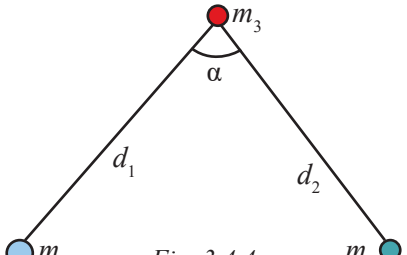


Fig. 3.4.4

Rezolvare:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,\ F = \sqrt{F_1^2 + F_2^3 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha} \qquad \text{(fig. 3.4.3)}$$

Forţele F1 şi F2 pot fi exprimate în acord cu Legea atracţiei universale a lui Newton:

$$F_1 = K\frac{m_1 \cdot m_3}{d_1^2}, \text{ respectiv: } F_2 = K\frac{m_2 \cdot m_3}{d_2^2}.$$

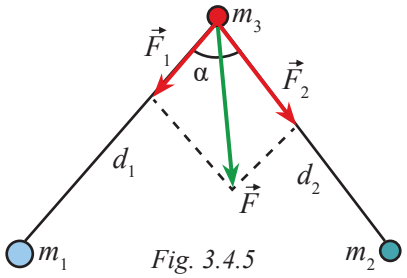


Fig. 3.4.5

Deci forţa rezultantă F va avea expresia:

$$F = \sqrt{\left(K\frac{m_1 \cdot m_3}{d_1^2}\right)^2 + \left(K\frac{m_2 \cdot m_3}{d_2^2}\right)^2 + 2K\frac{m_1 \cdot m_3}{d_1^2} \cdot K\frac{m_2 \cdot m_3}{d_2^2} \cdot \cos\alpha} =$$

$$= K \cdot m_3 \sqrt{\left(\frac{m_1}{d_1^2}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{d_2^2}\right)^2 + 2\frac{m_1}{d_1^2} \cdot \frac{m_2}{d_2^2} \cdot \cos\alpha}$$

EXERSEAZĂ

1. Calculează distanța dintre Soare și Pământ (fig. 3.4.6). Exprimă rezultatul în km.

Se cunosc: forța medie de atracție dintre Soare și Pământ, $F = 3{,}5 \cdot 10^{22}$ N, constanta atracției universale, $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, masa Pământului, $m_P \cong 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, masa Soarelui, $m_S \cong 1{,}9 \cdot 10^{30}$ kg.

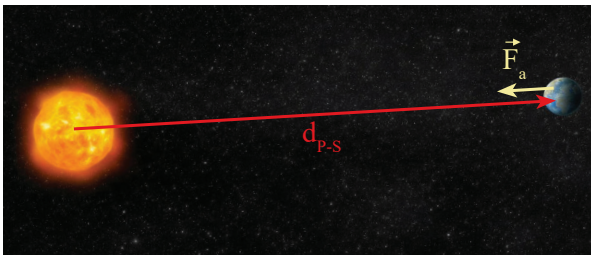


Fig. 3.4.6

2. Particularizează rezultatul obținut la problema nr. 3, pag. 82, pentru $\alpha = 90°$, respectiv $\alpha = 180°$ (corpul de masă m_3 este plasat între corpurile 1 și 2). Reprezintă pe un desen corpurile și figurează forțele în fiecare din cele două cazuri.

3. Compară forța de atracție dintre Soare și Pământ cu forța de atracție dintre Soare și Saturn. Se știe că: masa lui Saturn este de aproximativ 95 de ori mai mare decât masa Pământului, iar distanța Saturn-Soare este aproximativ egală cu 9,5 UA (unitate de măsură a lungimii folosită în astronomie pentru a măsura distanțele din sistemul solar sau din univers, egală cu distanța medie dintre Soare și Pământ).

3.4.2. Câmpul gravitațional

Soarele exercită o forță de atracție asupra Pământului, dar și asupra planetei Neptun, aflată la o distanță mult mai mare față de el. Cum se manifestă această forță la distanță? Se manifestă oare în același mod ca forța cu care Pământul atrage un măr? Pentru a explica modul în care se manifestă această ***interacțiune la distanță****, fără să existe o legătură materială între corpuri, vom introduce conceptul teoretic numit* ***câmp gravitațional****. În această lecție vom studia proprietățile acestui câmp. Mai cunoști și alte tipuri de câmpuri fizice, în afară de cel gravitațional?*

Fiecare corp generează în jurul său un **câmp gravitațional** și, la rândul său, corpul respectiv suferă acțiunea câmpurilor gravitaționale create de celelalte corpuri.

Reține
Interacțiunea gravitațională a două corpuri se realizează prin **intermediul câmpului gravitațional.**

Câmpul gravitațional reprezintă o formă de manifestare a materiei care nu poate fi percepută direct cu ajutorul simțurile noastre, ci doar prin efectele sale asupra altor corpuri. Existența unui câmp poate fi evidențiată doar prin experimente. Să plasăm într-un câmp gravitațional oarecare un corp „de probă" infinitezimal (poate fi considerat punct material), a cărui masă m are o valoare oricât de mică. Câmpul gravitațional va acționa asupra corpului de probă cu forța $\vec{F}$.

Reține
Intensitatea câmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$ se definește ca fiind mărimea **fizică vectorială** numeric egală cu **raportul** dintre forța $\vec{F}$ exercitată de câmp asupra copului de probă și masa m_p a corpului de probă:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m_p} \Rightarrow [\Gamma]_{SI} = \frac{N}{kg} = ms^{-2} \qquad (3.4.4)$$

În cazul în care **câmpul gravitațional este generat de o masă punctiformă *M*** (fig. 3.4.7), **intensitatea câmpului gravitațional** este:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= -K\frac{M\cdot m_p}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\\ \vec{\Gamma} &= \frac{\vec{F}}{m_p}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{\Gamma} = -K\frac{M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad (3.4.5),$$

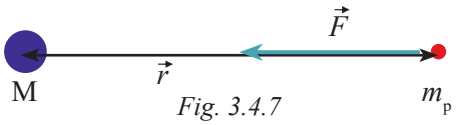


Fig. 3.4.7

având modulul:

$$\Gamma = K\frac{M}{r^2} \qquad (3.4.6)$$

Se observă că **intensitatea câmpului gravitațional depinde de masa *M* a corpului care generează câmpul și de poziția punctului din spațiu în care analizăm câmpul** respectiv ($\vec{r}$), intensitatea câmpului fiind independentă de masa corpului de probă.

Intensitatea câmpului gravitațional produs de o masă aflată în repaus nu variază în timp, deci câmpul gravitațional este un **câmp staționar**.

Câmpul gravitațional poate fi descris prin mulțimea vectorilor intensitate, $\vec{\Gamma}$, asociați (atașați) punctelor din jurul sursei de câmp.

Reține

Ca orice câmp fizic, **câmpul gravitațional** poate fi vizualizat în mod convențional cu ajutorul unor **linii de câmp**. În fiecare punct, vectorul intensitate a câmpului este tangent la linia de câmp ce trece prin punctul respectiv. În cazul unui corp sferic omogen, **liniile de câmp sunt radiale**, câmpul fiind central; toate liniile de câmp sunt îndreptate spre centrul corpului (fig. 3.4.8)

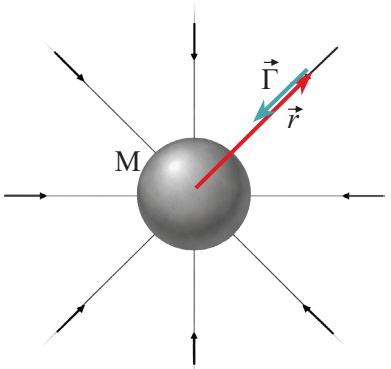


Fig. 3.4.8

Reține

În aproximația în care Pământul ar fi o sferă perfectă, cu masa distribuită uniform, **intensitatea câmpului gravitațional în exteriorul** acestuia se poate exprima ca și cum întreaga sa masă ar fi **concentrată în centrul său**.

Putem **extinde** această observație **pentru orice corp sferic și omogen:** datorită simetriei sferice, **câmpul gravitațional al unui corp sferic și uniform**, în exteriorul său, este identic cu cel produs dacă **întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul său:**

$$\Gamma = K\frac{M}{r^2}$$

Să considerăm un corp punctiform de masă *m,* situat în câmpul gravitațional generat de Pământ (fig. 3.4.9).

Asupra corpului acționează forța de atracție exercitată de planetă. Aplicând principiul al II-lea al mecanicii pentru corp, neglijând frecarea cu aerul și ținând cont că el se află în cădere liberă, putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}\\ \vec{F} &= m\cdot\vec{\Gamma}\\ \vec{a} &= \vec{g}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{g}(r) = \vec{\Gamma}(r)$$

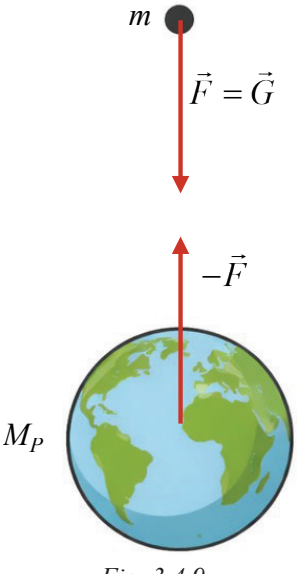


Fig. 3.4.9

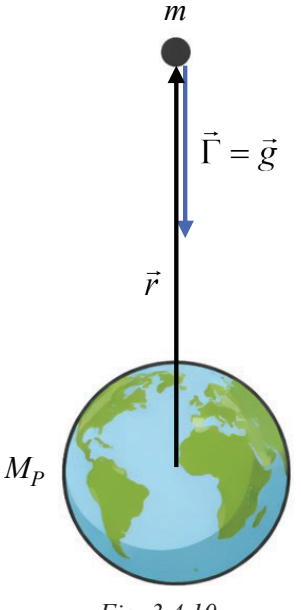


Fig. 3.4.10

Reține

Intensitatea câmpului gravitațional în vecinătatea Pământului, considerat sferic și omogen, coincide cu **accelerația cu care cade un corp** lăsat liber în acest câmp, în absența frecării cu aerul. Această observație poate fi **extinsă** pentru orice alt **corp ceresc presupus sferic și omogen.**

Deoarece **intensitatea câmpului gravitațional nu depinde de masa corpului de probă,** rezultă că, într-un câmp gravitațional, în absența altor interacțiuni, toate corpurile au aceeași accelerație, indiferent de masa lor.

Scanează codul QR. Vei putea urmări **experimentul** efectuat de astronauții misiunii Apollo 15 pe Lună, **experiment** care **confirmă** afirmațiile de mai sus. Astronauții au lăsat liber de la aceeași înălțime o pană de vultur și un ciocan. Ambele corpuri au ajuns simultan pe suprafața satelitului! Pe Lună, atmosfera este, practic, inexistentă și nu există frecare cu aerul. Deci, sub acțiunea exclusivă a câmpului gravitațional exercitat de Lună, corpurile au căzut cu aceeași accelerație.

Accelerația câmpului gravitațional **variază cu altitudinea** h, măsurată de la suprafața Pământului (fig. 3.4.11):

$$g_h = \Gamma_h = K\frac{M_P}{(R_P + h)^2}$$

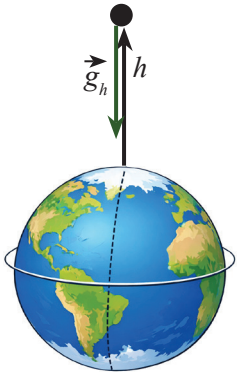


Fig. 3.4.11

Se observă că intensitatea câmpului gravitațional scade odată cu creșterea altitudinii. Cu cât ne îndepărtăm de Pământ, cu atât atracția gravitațională devine mai mică.

Putem exprima această accelerație în funcție de accelerația la suprafața Pământului, g_0:

$$\left.\begin{aligned} g_h = \Gamma_h = K\frac{M_P}{(R_P+h)^2}\cdot\frac{R_P^2}{R_P^2} \\ g_0 = K\frac{M_P}{R_P^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_h = \Gamma_h = g_0\frac{R_P^2}{(R_P+h)^2}.$$

De exemplu, pentru o altitudine h = 50 km măsurată de la suprafața Pământului, accelerația gravitațională are valoarea (g_0 = 9,80 m/s², R_P = 6370 km):

$$g_h = \Gamma_h = g_0\cdot\left(\frac{R_P}{R_P+h}\right)^2 = 9{,}80\cdot\left(\frac{6370}{6420}\right)^2 \cong 9{,}63\ \text{m/s}^2.$$

Deși valoarea obținută este mai mică decât valoarea accelerației gravitaționale la suprafața Pământului, chiar și la această altitudine, efectul gravitației rămâne foarte puternic.

În imediata vecinătate a suprafeței Pământului, pe regiuni spațiale restrânse (de exemplu, în sala de clasă), se poate considera că **intensitatea câmpului gravitațional are aceeași valoare în toate punctele spațiului, iar liniile de câmp sunt paralele și echidistante** (fig. 3.4.12). Un astfel de câmp se numește **câmp gravitațional uniform.**

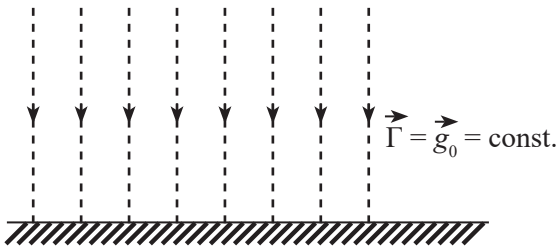


Fig. 3.4.12

Reține

În apropierea suprafeței Pământului (sau a oricărui corp masiv), variația câmpului gravitațional poate fi neglijată. Prin urmare, într-o regiune spațială restrânsă, **câmpul gravitațional** poate fi **considerat uniform**.

APLICĂ

1. Calculează raportul dintre accelerația gravitațională de la suprafața Pământului și cea de la suprafața Lunii. Se cunosc: $M_P = 81M_L$ și $R_P = 3{,}7R_L$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{aligned} g_{0P} &= K\frac{M_P}{R_P^2} \\ g_{0L} &= K\frac{M_L}{R_L^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{g_{0P}}{g_{0P}} = \frac{K\dfrac{M_P}{R_P^2}}{K\dfrac{M_P}{R_P^2}} \qquad (3.4.11)$$

Înlocuind în relația 3.4.11 valorile pentru $M_P = 81M_L$ și $R_P = 3{,}7R_L$, obținem:

$$\frac{g_{0P}}{g_{0P}} = \frac{\dfrac{81M_L}{(3,7)^2 R_L^2}}{\dfrac{M_P}{R_P^2}} = 5.78 \cong 6$$

Scanează codul QR pentru a privi mersul „săltat” al astronauților echipajului Apollo 17, Gene Cernan și Jack Schmitt, pe suprafața Lunii, unde intensitatea câmpului gravitațional este de aproape șase ori mai mică decât intensitatea câmpului gravitațional pe suprafața Pământului.

2. Cunoscând că distanța de la centrul Pământului până la centrul Lunii este de aproximativ 60 de raze terestre și că masa Pământului este egală cu aproximativ 81 de mase lunare, exprimă în raze terestre distanța la care se află punctul de imponderabilitate față de suprafața Pământului. (Punctul de imponderabilitate este punctul în care câmpul gravitațional rezultant Pământ – Lună este nul).

Rezolvare:

Calculăm intensitatea câmpurilor generate de cele două corpuri cerești la distanța x măsurată față de centrul Pământului (fig. 3.4.13).

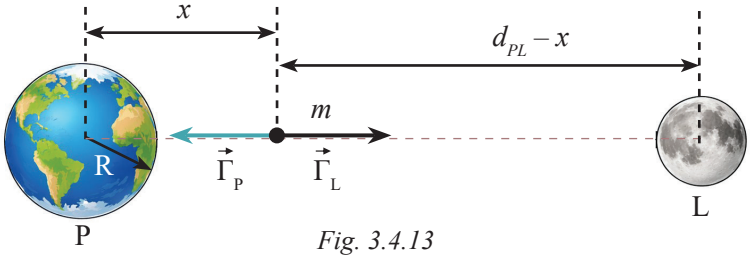


Fig. 3.4.13

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_P &= K\frac{M_P}{x^2} \\ \Gamma_L &= K\frac{M_L}{(d_{PL}-x)^2} \\ \Gamma_P &= \Gamma_L \end{aligned}\right\} \Rightarrow K\frac{M_P}{x^2} = K\frac{M_L}{(d_{PL}-x)^2} \Rightarrow$$

$$M_P \cdot (d_{PL}-x)^2 = M_L \cdot x^2 \Rightarrow \sqrt{M_P}(d_{PL}-x) = \sqrt{M_L}\cdot x \Rightarrow x = \frac{d_{PL}\cdot\sqrt{M_P}}{\sqrt{M_P}+\sqrt{M_L}}$$

Cum pentru $M_P = 81M_L$ și $d_{PL} = 60R$, obținem:

$$x = \frac{60 \cdot R \cdot \sqrt{81M_L}}{\sqrt{81 \cdot M_L} + \sqrt{M_L}} = 54 \cdot R$$

Această distanță este calculată față de centrul Pământului. Față de suprafața Pământului:

$$D = x - R = 53R$$

3. Pe suprafața Pământului, valoarea intensității câmpului gravitațional diferă de la un punct la altul din cauza mișcării sale de rotație și a faptului că forma sa nu este perfect sferică. Calculează altitudinea deasupra unui pol la care greutatea unui explorator este egală cu „greutatea" sa la Ecuator. Cunoști constanta atracției universale K, densitatea medie ρ, raza medie R, și perioada de rotație T ale Pământului. Aplicație numerică: $K = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$, r = 55 kg/m³, R = 6400 km, T = 24 h.

Rezolvare:

Greutatea exploratorului deasupra polului poate fi exprimată astfel:

$$\left.\begin{aligned} G_p &= m \cdot \Gamma_p \\ \Gamma_p &= K \frac{M_P}{(R+h)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G_p = K \frac{m \cdot M_P}{(R+h)^2}$$

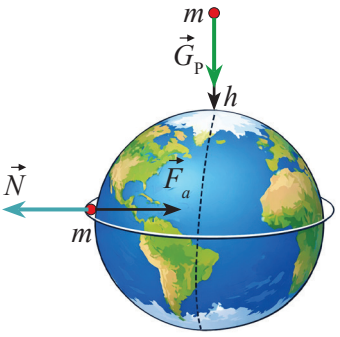


Fig. 3.4.14

La Ecuator, „greutatea" exploratorului este interpretată ca fiind forța de apăsare normală a corpului său pe suprafața Pământului (fig. 3.4.14). Această forță este egală ca valoare, conform principiului acțiunii și reacțiunii, cu forța de reacțiune normală a Pământului asupra corpului său (exploratorul se află în mișcare circulară uniformă față de SRI legat de centrul Pământului):

$$\left.\begin{aligned} ma_n &= N - F_a \\ F_a &= K \frac{m \cdot M_P}{R^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ma_n = K \frac{m \cdot M_P}{R^2} - N \Rightarrow N = K \frac{m \cdot M_P}{R^2} - ma_n$$

Cum cele două greutăți sunt egale, după simplificări, obținem:

$$K \cdot \frac{M_P}{(R+h)^2} = K \cdot \frac{M_P}{R^2} - a_n \qquad (3.4.7)$$

Exprimăm accelerația normală și masa Pământului în funcție de mărimile fizice date în problemă și înlocuim relațiile în expresia 3.4.7:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \omega^2 R \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R; \quad \left.\begin{aligned} M_P &= \rho \cdot V \\ V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_P = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$K \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{(R+h)^2} = K \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R \Rightarrow (R+h)^2 = \frac{K \cdot \rho \cdot R^2}{3 \cdot \left(\frac{K \cdot \rho \cdot R^2}{3} - \frac{\pi}{T^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = R\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3\pi}{K \cdot \rho \cdot T^2}}} - 1\right) \qquad (3.4.8)$$

Aplicație numerică: înlocuind valorile numerice pentru K, ρ, R și T în relația (3.4.8), obținem h = 11 km, mult mai mică decât raza Pământului.

4. Un corp este lansat vertical în sus de la nivelul solului, cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s în câmp gravitațional uniform ($g_0 = 10$ m/s^2). Calculează:

a. după cât timp de la lansare corpul ajunge la înălțimea maximă;

b. înălțimea maximă atinsă de corp în mișcarea sa;

c. timpul după care revine în punctul de lansare;

d. viteza corpului în momentul în care atinge solul.

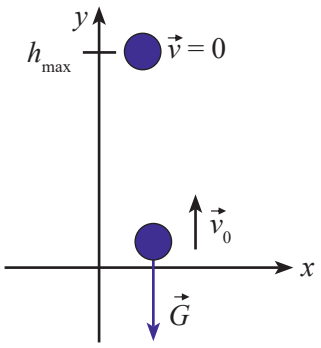


Fig. 3.4.15

Rezolvare:

a. Deoarece asupra corpului acționează doar greutatea sa, accelerația acestuia este (fig. 3.4.15):

$$\left.\begin{aligned} m\cdot a &= -G \\ G &= m\cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\cdot a = -m\cdot g \Rightarrow a = -g$$

Pentru a afla timpul de urcare, aplicăm legea vitezei pentru corpul care urcă rectiliniu uniform variat:

$$\left.\begin{aligned} &v_y = v_0 + a\cdot t \\ &v = 0 \Rightarrow t = t_u \\ &a = -g \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = v_0 - g\cdot t_u \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = \frac{10}{10}\ \text{s} = 1\ \text{s}.$$

b. Alegem originea axei *Oy* la nivelul solului, deci $y_0 = 0$. Coordonata corpului la un moment oarecare este:

$$\left.\begin{aligned} &y = y_0 + v_0\cdot t + \frac{a\cdot t^2}{2} \\ &y_0 = 0 \\ &a = -g \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = v_0\cdot t - \frac{g\cdot t^2}{2}.$$

Înălțimea maximă este coordonata corpului la momentul $t = t_u$.

$$\left.\begin{aligned} &y = v_0\cdot t - \frac{g\cdot t^2}{2} \\ &t = t_u = \frac{v_0}{g} \\ &y = h_{max} \end{aligned}\right\} \Rightarrow h_{max} = v_0\cdot\frac{v_0}{g} - \frac{g\cdot\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10\cdot 10}{2\cdot 10}\ \text{m.} = 5\ \text{m}.$$

c. Timpul total de zbor se calculează cu condiția $y = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &y = v_0\cdot t - \frac{g\cdot t^2}{2} \\ &y = 0 \\ &t = t_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = v_0\cdot t_t - \frac{g\cdot t_t^2}{2} \Rightarrow t_t = \frac{2v_0}{g} = 2t_u\text{'} = 2\ \text{s}$$

(ecuația $0 = v_0\cdot t - \frac{g\cdot t^2}{2}$ este o ecuație de gradul al II-lea, cea de-a doua soluție este $t_0 = 0$).

Se poate observa că timpul de coborâre de la înălțimea maximă este egal cu timpul de urcare la înălțimea maximă:

$$\left.\begin{aligned} &t_c = t_t - t_u \\ &t_t = \frac{2v_0}{g} \\ &t_u = \frac{v_0}{g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_c = \frac{v_0}{g} = t_u.$$

d. Viteza corpului când atinge solul este chiar viteza corpului la momentul de timp $t = t_t$:

$$\left.\begin{aligned} v_y &= v_0 - g \cdot t \\ t = t_t &= \frac{2v_0}{g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_y = -v_0 = -10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

EXERSEAZĂ

1. Care este motivul pentru care alegem masa m_p infinitezimală?

2. Considerând că Pământul este o sferă perfectă de rază R = 6370 km și cunoscând valoarea accelerației gravitaționale la suprafața planetei g_0 = 9,8 ms^{-2}, determină masa Pământului.

3. Calculează accelerația gravitațională într-un punct situat deasupra unui pol, la o înălțime egală cu n = 3 raze terestre. Se cunosc: g_0 = 9,85 m/s^2.

4. Presupunând că te afli pe o planetă cu masa de trei ori mai mare decât a Pământului și cu raza de două ori mai mică, ce greutate vei avea pe această planetă?

5. Calculează ce perioadă de rotație trebuie să aibă un asteroid pentru ca, la Ecuator, corpurile să devină imponderabile. Se cunosc: raza asteroidului R, densitatea sa ρ și constanta gravitațională K.

6. Exoplaneta TOI-3261 b are o densitate medie egală cu aproximativ jumătate din densitatea Pământului şi o suprafață de arie aproximativ de 15 ori mai mare decât aria suprafeţei Pământului.

a. Redactează un scurt eseu despre exoplanete, în general, şi despre această exoplanetă, în mod particular. Asigură-te că în lucrarea ta apar informaţii relevante: ce sunt exoplanetele, cum pot fi detectate, numele stelei în jurul căreia orbitează exoplaneta TOI-3261 b, apropierea de stea, perioada de revoluţie, comparaţii interesante cu planete din Sistemul Solar.

b. Calculează de câte ori este mai mare forţa de atracţie dintre exoplanetă şi steaua în jurul căreia orbitează faţă de forţa de atracţie dintre Soare şi Pământ. Dacă eseul tău nu conţine informaţii care să îţi permită să calculezi numeric, poţi folosi următoarele date: masa stelei în jurul căreia orbitează planeta este cu aproximativ 10% mai mică decât masa Soarelui, iar distanţa Pământ – Soare este de aproximativ 58 de ori mai mare decât distanţa exoplaneta TOI-3261 b – stea.

c. Explică rezultatul obţinut folosind datele referitoare la sistemul planetă – stea (relaţii între mase, respectiv între distanţe).

d. Calculează cu cât la sută este mai mare acceleraţia gravitaţională pe suprafaţa acestei planete faţă de acceleraţia gravitaţională pe suprafaţa Pământului.

e. Propune, împreună cu alt coleg, o metodă **practică** cu care să ilustrezi în faţa colegilor tăi, modul de detectare a exoplanetelor.

Indicaţie: Imaginează-ţi că observi o stea foarte îndepărtată. Ce modificare a luminozităţii ei poţi detecta atunci când o planetă trece periodic prin faţa stelei? Puteţi folosi (tu şi colegul tău) o lanternă – sau chiar lanterna telefonului – ca stea şi o bilă drept planeta care trece prin faţa „stelei”.

7. Un urs jucăuş cade în apă, fără viteză iniţială, de pe un dâmb de înălţime h = 4,915 m. Ursul ajunge la suprafaţa apei după o secundă. Se neglijează frecarea cu aerul. Ce culoare are ursul?

Indicaţie: $g_p \approx 9.830$ m/s^2, $g(45^o) \approx 9.806$ m/s^2, $g_E \approx 9{,}780$ m/s^2.

PROIECT

Îți propui **să proiectezi o colonie spațială** în care condițiile de trai să fie cât mai apropiate de cele de pe Pământ. Să presupunem că habitatul este constituit din **suprafața curbă interioară** a unui cilindru de rază R (acest model, introdus de fizicianul Gerard K. O'Neill, nu este singura variantă, dar este foarte studiat, fiind plauzibil din punct de vedere fizic și ingineresc). Gravitația artificială se poate obține prin rotirea cilindrului în jurul propriei axe de simetrie.

a. Alege o valoare pentru raza R și justifică alegerea făcută (de exemplu, dacă vrei ca habitatul să fie doar stație de cercetare sau un nou leagăn pentru omenire).

b. Calculează, în funcție de valoarea aleasă pentru R, cu ce frecvență trebuie rotit cilindrul pentru ca ocupanții coloniei să resimtă o „accelerație gravitațională” de 9,8 m/s^2.

TEST DE EVALUARE

Fiecare răspuns corect se notează cu 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

1. Identifică afirmația greșită și notează litera corespunzătoare în caiet.
Forța centripetă:
a) determină mișcare circulară;
b) poate fi reprezentată de forța de frecare;
c) poate fi forța rezultantă care acționează asupra corpului;
d) nu depinde de viteza corpului;

2. Identifică afirmația corectă și notează litera corespunzătoare în caiet.
Pentru forțele de tip acțiune și reacțiune, este adevărat că:
a) acționează simultan asupra unui singur corp;
b) acționează asupra unor corpuri diferite și au aceeași valoare;
c) acțiunea este mai mare decât reacțiunea;
d) acționează în momente diferite: întâi acțiunea și apoi reacțiunea.

3. Scrie în caiet afirmațiile de mai jos și indică pentru fiecare dacă este adevărată (**A**) sau falsă (**F**):
a) Legile mecanicii sunt aceleași în orice sistem de referință inerțial.
b) Viteza absolută este totdeauna suma algebrică dintre viteza relativă și viteza de transport.
c) Două corpuri punctiforme se atrag cu o forță invers proporțională cu distanța dintre ele;
d) Intensitatea câmpului gravitațional într-un punct depinde de masa corpului de probă aflat în acel punct.

4. Justifică alegerea făcută la subpunctul b al exercițiului anterior.

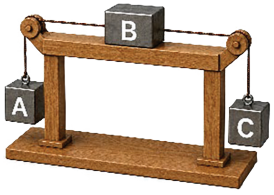
5. Explică de ce picăturile de ploaie, deși cad vertical, lasă urme înclinate pe geamul unui autoturism aflat în mișcare.

6. O forță orizontală F acționează asupra unui corp cu masa m = 10 kg, aflat pe un plan înclinat care formează unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala, menținând corpul în echilibru. Forța de frecare dintre corp și plan are valoarea f = 80 N, iar corpul este pe punctul de a aluneca în sus pe plan. Valoarea aproximativă a forței F este:
a) 15 N; b) 50 N; c) 121,5 N; d) 150,3 N; e) 206 N.

7. Ce valoare trebuie să aibă accelerația orizontală minimă a căruciorului din figura alăturată astfel încât corpul de masă m să nu cadă în timpul mișcării? Se cunoaște coeficientul de frecare μ dintre corp și peretele căruciorului.



a) g/μ; b) μg; c) g/2μ;
d) 2g/μ; e) 1/2 μg; f) 2μg.



8. Trei corpuri cu masele m_A = 1,5 kg, m_B = 10 kg și m_C = 3 kg sunt legate ca în figura alăturată. Coeficientul de frecare între masa m_B și suportul orizontal pe care se deplasează este μ = 0,2. Accelerația sistemului are valoarea:
a) 1,1 m/s²; b) 2 m/s²; c) 0,5 m/s²; d) 0 m/s²; e) 3 m/s².

9. Două corpuri sferice au masele m_1 și $m_2 = 9m_1$, iar distanța dintre centrele lor fiind r. Distanța x măsurată față de centrul corpului m_1 pentru care intensitatea câmpului gravitațional rezultant este nulă este:
a) r/10; b) r/2; c) r/4; d) r/9 ; e) r/3.



La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să determini lucrul mecanic și să aplici teorema variației energiei cinetice pentru a descrie starea de mișcare în situații rectilinii și curbilinii;
- să rezolvi exerciții și probleme utilizând puterea mecanică și randamentul, corelând relațiile dintre lucru mecanic, energie și timp;
- să identifici energiile potențiale gravitațională și elastică, să le calculezi și să aplici legea conservării energiei mecanice pentru a analiza mișcarea;
- să aplici teorema variației impulsului și să stabilești condițiile de conservare a impulsului pentru sisteme de corpuri;
- să rezolvi probleme de ciocniri unidimensionale, folosind conservarea impulsului și, după caz, verificând conservarea energiei mecanice;
- să analizezi mișcarea sistemelor de corpuri, utilizând centrul de masă și conservarea impulsului, și să aplici aceste idei în contexte diferite, precum propulsia.

Capitolul 4

Teoreme de variație și legi de conservare în mecanică

4.1. Lucrul mecanic

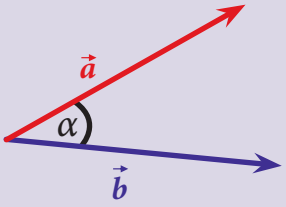
În studiul fenomenelor fizice, noțiunile de **energie**, **lucru mecanic**, **putere** și **impuls mecanic** ocupă un loc esențial. Energia reprezintă capacitatea unui sistem de a efectua lucru mecanic sau de a produce transformări, iar lucrul mecanic exprimă transferul de energie între corpuri sau sisteme sub acțiunea unei forțe. Puterea caracterizează rapiditatea cu care se efectuează lucrul mecanic sau se transformă energia. Impulsul mecanic caracterizează starea de mișcare a unui corp și se modifică atunci când asupra lui acționează forțe, fiind legat de efectul acestora în timp.

În acest capitol vom analiza **teoremele de variație** care stabilesc legătura dintre forțele aplicate și modificarea **energiei mecanice**, respectiv a **impulsului mecanic**, precum și **legile de conservare** corespunzătoare. Acestea descriu condițiile în care energia totală și impulsul total ale unui sistem se mențin constante (în special pentru sisteme izolate) și stau la baza înțelegerii mișcării și a transformărilor din natură.

Produsul scalar a doi vectori

Definiție

Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$, notat simbolic $\vec{a}\cdot\vec{b}$, este un scalar, a cărui valoare este egală cu produsul modulelor vectorilor factori $\vec{a}$ și $\vec{b}$, înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ei.



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\alpha$$

Observații: Rezultatul produsului scalar a două mărimi vectoriale este o mărime scalară.

– Produsul scalar a doi versori[1] perpendiculari este nul.

De exemplu: $\vec{i}\cdot\vec{j}=0;\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0.$

– Produsul scalar a doi versori paraleli este 1.

De exemplu: $\vec{i}\cdot\vec{i}=1;\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1;\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1.$

Exemplu:

Fie vectorii $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ și $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ se poate scrie sub forma: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă

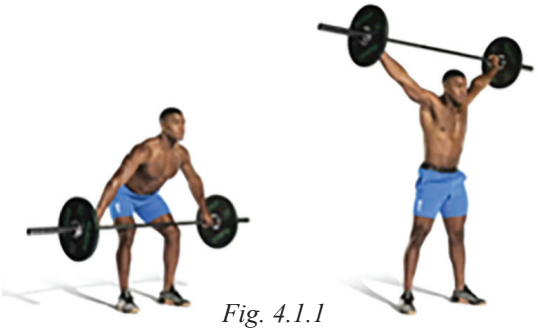


Fig. 4.1.1

Atunci când un halterofil ține o halteră deasupra capului acționând asupra ei cu o forță, **forța nu efectuează *L***, dar când **ridică** haltera deasupra capului acționând cu aceeași forță, aceasta efectuează *L* (fig. 4.1.1.).

Reține

Dacă sub acțiunea unei forțe, punctul de aplicație al acesteia se deplasează, spunem că forța efectuează un lucru mecanic.

[1] Versorul unei axe este un vector care are direcția și sensul axei, iar modulul egal cu unitatea de lungime pe axă. Nu are unitate de măsură. Versorii axelor de coordonate sunt: $Ox \to \vec{i}$, $Oy \to \vec{j}$, $Oz \to \vec{k}$. Orice vector situat pe o axă de versor $\vec{i}$ se poate scrie sub forma: $\vec{a} = \pm a\cdot\vec{i}$.

Definiție

Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă, $\vec{F}$, al cărei punct de aplicație, L, suferă o deplasare $\vec{d}$ este mărimea fizică scalară definită ca produsul scalar dintre vectorul forță și vectorul deplasare.

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos\alpha \quad (4.1.1)$$

unde α este unghiul format de vectorii $\vec{F}$ și $\vec{d}$, iar $\vec{d}$ este vectorul deplasare al punctului de aplicație al lui $\vec{F}$ (fig. 4.1.2).

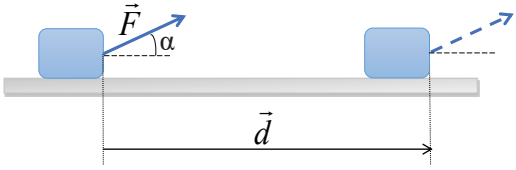


Fig. 4.1.2

Observație: Lucrul mecanic este o mărime fizică scalară.

Ecuația unității de măsură pentru lucrul mecanic în Sistemul Internațional este:

$$[L]_{SI} = [F]_{SI} \cdot [d]_{SI} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \ \text{(joule)} \quad (4.1.2)$$

Reține

Un joule este lucrul mecanic efectuat de o forță constantă de 1 N atunci când punctul său de aplicație se deplasează rectiliniu pe distanța de 1 m, pe direcția și în sensul forței.

În funcție de valorile unghiului α, se disting următoarele situații particulare:

a) $\alpha = 0° \rightarrow L = F \cdot d$, deplasarea se face pe direcția și în sensul forței (fig. 4.1.3).

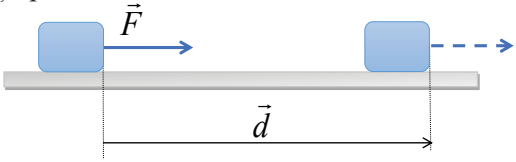


Fig. 4.1.3

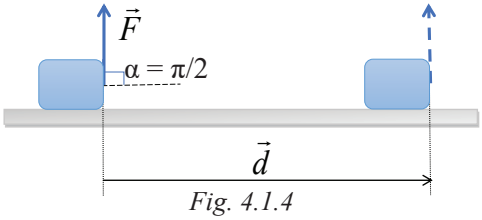


Fig. 4.1.4

b) $\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow L = 0$, în fig. 4.1.4.a) deplasarea se face perpendicular pe direcția forței. În această situație forța **nu** efectuează lucru mecanic.

De exemplu, în fig. 4.1.4 b, în cazul mișcării circulare uniforme, forța gravitațională joacă rol de forță centripetă și nu efectuează lucru mecanic.

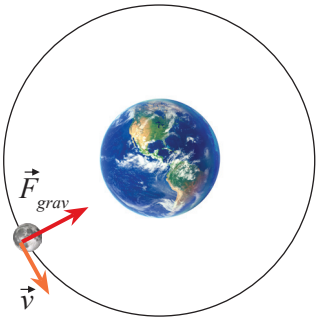


Fig. 4.1.4. b)

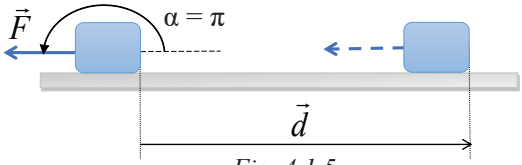


Fig. 4.1.5

c) $\alpha = \pi \rightarrow L = -F \cdot d$, deplasarea se face pe direcția forței, în sens opus acesteia (fig. 4.1.5).

De exemplu, forțele rezistente (frecare) sunt orientate în sens opus deplasării.

Considerăm un corp asupra căruia acționează simultan mai multe forțe concurente, iar rezultanta forțelor este $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$.

Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor, $\vec{R}$, la deplasarea corpului pe distanța $\vec{d}$, este:

$$L = \vec{R} \cdot \vec{d} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n) \cdot \vec{d} = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + ... + \vec{F}_n \cdot \vec{d} = L_1 + L_2 + ... + L_n \quad (4.1.3)$$

Lucrul mecanic al rezultantei unor forțe concurente este egal cu suma lucrurilor mecanice ale forțelor concurente.

Lucrul mecanic motor. Lucrul mecanic rezistent

Lucrul mecanic al unei forțe constante care acționează în sensul deplasării (fig. 4.1.3) este totdeauna pozitiv ($L > 0$). Spunem că forța efectuează un **lucru mecanic motor**, iar forța se numește **forță motoare.** *Un exemplu de forță motoare este forța de tracțiune.*

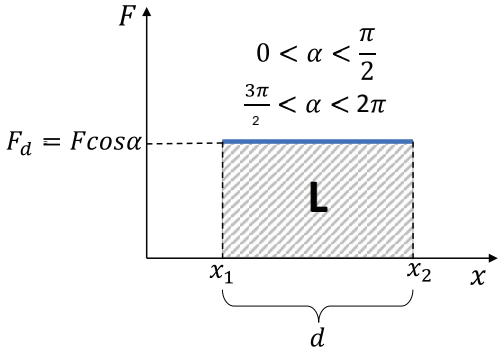
Lucrul mecanic al unei forțe constante care acționează în sens opus deplasării (fig. 4.1.5) este totdeauna negativ ($L < 0$). Spunem că forța efectuează un **lucru mecanic rezistent**, iar forța se numește **forță rezistentă.** *Un exemplu de forță rezistentă este greutatea corpului atunci când acesta este ridicat.*

Reține
Aceeași forță poate fi motoare sau rezistentă, în funcție de sensul deplasării.

Interpretarea geometrică a lucrului mecanic

Lucrul mecanic al unei forțe constante este numeric egal cu aria suprafeței delimitate de graficul forței $F(x)$ și axa Ox, cuprinsă între coordonatele x_1 și x_2 (fig. 4.1.6).

Interpretarea lucrului mecanic pentru forța motoare



Interpretarea lucrului mecanic pentru forța rezistentă

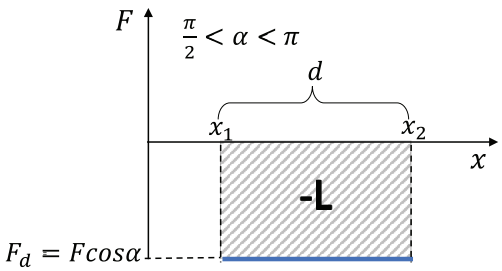
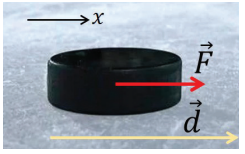


Fig. 4.1.6

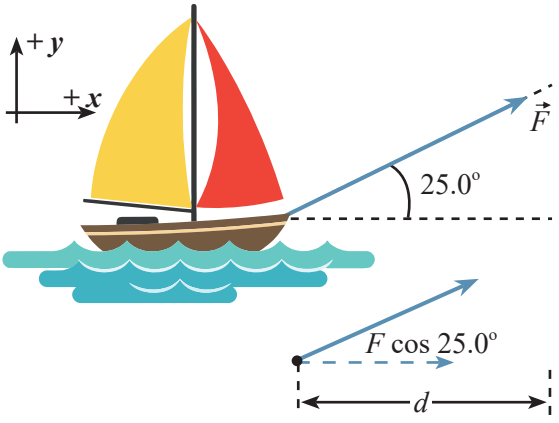
APLICĂ

1. Un puc de hochei cu masa de 105 g alunecă pe gheață. Un jucător exercită asupra lui o forță constantă $F = 4{,}50$ N pe o distanță $d = 0{,}150$ m.
Ce lucru mecanic efectuează jucătorul asupra pucului?



Rezolvare:
Aplicăm formula lucrului mecanic:
$L = F \cdot d \cdot \cos\alpha$, unde $\alpha = 0°$, deci $L = F \cdot d$.
$L = 4{,}50\ \text{N} \cdot 0{,}150\ \text{m} \cdot 1 = 0{,}675\ \text{J}$

2. Un marinar trage o barcă pe o distanță de 30,0 m folosind o funie care formează un unghi de 25,0° cu orizontala. Ce lucru mecanic efectuează marinarul asupra bărcii dacă aplică o forță de 255 N asupra funiei?



Rezolvare:
Aplicăm formula pentru lucrul mecanic atunci când există un unghi între forță și direcția orizontală a deplasării.
$L = F \cdot d \cdot \cos\alpha$,
$L = 255\ \text{N} \cdot 30{,}0\ \text{m} \cdot \cos 25{,}0°$
$L = 6{,}93 \times 10^3\ \text{J}$

Lucrul mecanic al unei forțe variabile

În paragraful anterior am definit lucrul mecanic efectuat de o forță constantă. Dar ce se întâmplă atunci când întindem un arc? Cu cât îl întindem mai mult, cu atât trebuie să tragem mai tare, deci forța nu este constantă pe măsură ce arcul este întins. Să ne imaginăm un tren care se deplasează pe o cale ferată dreaptă, iar mecanicul modifică în mod constant poziția manetei de accelerație a locomotivei sau aplică frânele.

În cele ce urmează, vom calcula lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă.

Să presupunem că un mobil se deplasează de-a lungul axei *Ox*, sub acțiunea unei forțe paralele cu axa, din punctul *A* până în punctul *B*, așa cum este arătat în fig. 4.1.7. a). În fig. 4.1.7. b) este reprezentat graficul forței $\vec{F}$ ca funcție de coordonata *x* a mobilului.



Fig. 4.1.7. a)

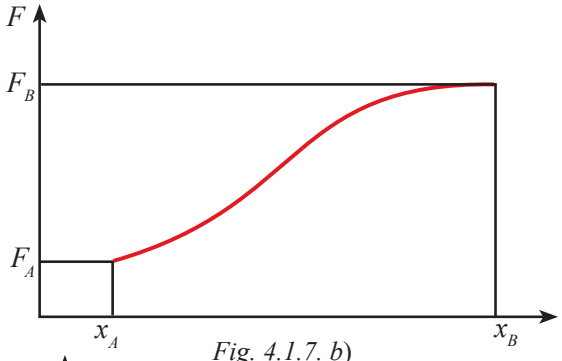


Fig. 4.1.7. b)

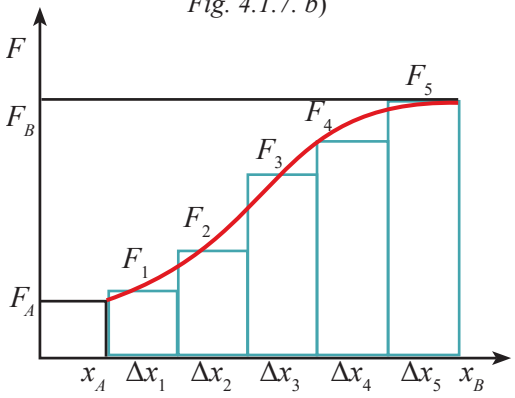


Fig. 4.1.7. c)

Pentru a afla lucrul mecanic efectuat de această forță, împărțim deplasarea totală în segmente mici Δx_1, Δx_2, …, ca în fig. 4.1.7. c). Aproximăm lucrul mecanic efectuat de forță de-a lungul lui Δx_1 cu produsul dintre forța medie F_1 pe acel segment și Δx_1. Repetăm operația pentru fiecare segment în parte și apoi adunăm lucrurile mecanice pentru toate segmentele. Lucrul mecanic efectuat de forță pe întreaga deplasare de la x_A la x_B este aproximativ egal cu:

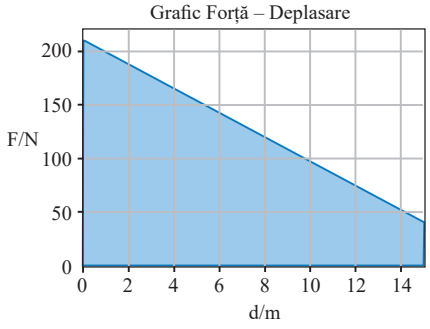
$$L = F_1 \cdot \Delta x_1 + F_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots . \quad (4.1.4)$$

Din fig. 4.1.7. c) se poate observa că $F_1 \cdot \Delta x_1$ reprezintă aria primei benzi verticale, $F_2 \cdot \Delta x_2$ aria celei de-a doua și așa mai departe. Suma acestor arii reprezintă aria de sub curba din fig. 4.1.7.b) delimitată de axa *Ox*, între coordonatele x_A și x_B.

Concluzie: Lucrul mecanic total efectuat de o forță variabilă este reprezentat de aria suprafeței cuprinse sub graficul forței $F(x)$ și axa *Ox*, între dreptele $x = x_A$ și $x = x_B$.

APLICĂ

O mașină s-a oprit pe un drum orizontal și trebuie împinsă pentru a porni. Pe măsură ce mașina pornește de pe loc, șoferul observă că are nevoie de o forță din ce în ce mai mică pentru a o menține în mișcare. Să presupunem că, în primii 15 m, forța șoferului a scăzut într-un ritm constant de la 210 N la 40 N. Desenează un grafic forță – deplasare care să reprezinte lucrul mecanic efectuat. Cât lucru mecanic a fost efectuat asupra mașinii?



Rezolvare:

Lucrul mecanic efectuat este numeric egal cu aria suprafeței de sub graficul forță-deplasare.

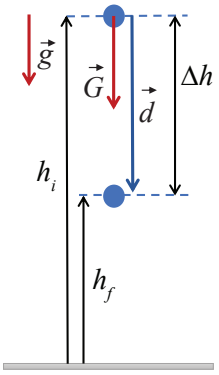
$$L = \frac{(F_i + F_f)}{2} \cdot d \; ; \; L = \frac{(210\ \text{N} + 40\ \text{N})}{2} \cdot 15\ \text{m} = 125\ \text{N} \cdot 15\ \text{m} = 1875\ \text{J}$$

4.2. Lucrul mecanic al unor tipuri de forțe

Lucrul mecanic al forței de greutate

Considerăm un punct material m aflat în vecinătatea suprafeței Pământului, în care câmpul gravitațional poate fi considerat uniform, astfel încât accelerația gravitațională și greutatea sunt constante. Vom analiza lucrul mecanic efectuat de forța de greutate în cazul căderii pe verticală sau a urcării pe verticală, neglijând rezistența din partea aerului, apoi la alunecarea pe un plan înclinat.

Pentru a defini lucrul mecanic al greutății, vom stabili: sensul axei Oy în sus; toate înălțimile se măsoară față de suprafața Pământului; $\Delta h = h_f - h_i$.

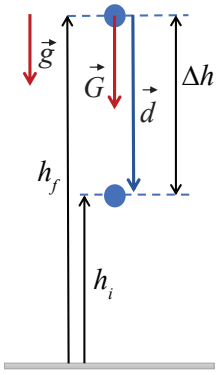


Căderea liberă – forța de greutate este orientată în jos, pe direcția și în sensul deplasării

$$L = \vec{G} \cdot \vec{d} = mg \cdot d \cdot \cos 0° = -mg \cdot \Delta h$$

Deoarece $\Delta h = h_f - h_i < 0 \Rightarrow L > 0$.

Forța de greutate joacă rol de forță motoare, iar lucrul mecanic este motor.



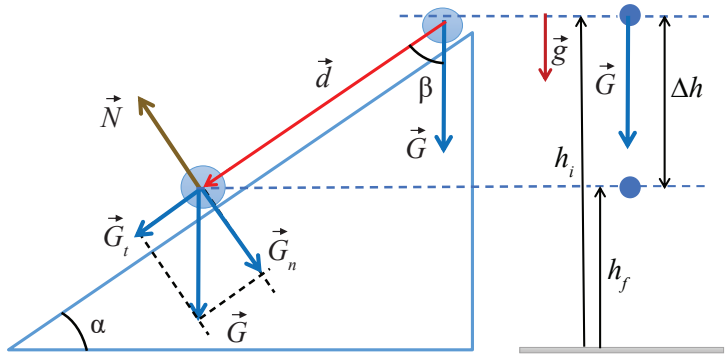
Aruncarea pe verticală în sus – forța de greutate este orientată în jos, pe direcția deplasării și în sens opus acesteia.

$$L = \vec{G} \cdot \vec{d} = mg \cdot d \cdot \cos 180° = -mg \cdot (h_f - h_i) = -mg\Delta h$$

Deoarece $\Delta h = h_f - h_i > 0 \Rightarrow L < 0$.

Forța de greutate joacă rol de forță rezistentă, iar lucrul mecanic este rezistent.

Coborâre pe verticală pe distanța Δh în absența frecării:



$L = \vec{G} \cdot \vec{d} = mg \cdot d \cdot \cos\beta = -mg \cdot (h_i - h_f) = -mg\Delta h$, unde $d \cdot \cos\beta$ reprezintă diferența de nivel, Δh.

Concluzii:

1. Lucrul mecanic al greutății corpului este independent de drumul parcurs de corp și de legea de mișcare a acestuia (depinde numai de pozițiile inițială și finală);

2. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este egal cu produsul modulului greutății prin diferența de nivel între pozițiile inițială și finală ale punctului material:

$$L_G = \text{mg} \cdot (h_i - h_f) = -mg\Delta h \quad (4.2.1),$$

unde h_i și h_f reprezintă înălțimile pozițiilor inițială și finală ale punctului material față de nivelul de referință ales convenabil ca fiind $h = 0$.

APLICĂ

Alexandru urcă pe un deal împingând un cărucior cu materiale școlare. Căruciorul și materialele școlare au masa de 20 kg și este deplasat în trei etape: urcă pe o pantă o înălțime de 5 m pe o distanță de 12 m; apoi căruciorul este deplasat pe orizontală încă 10 m; în final, Alexandru coboară căruciorul de cealaltă parte a dealului, pe o distanță verticală de 5 m în jos. Se consideră accelerația gravitațională g = 9,8 m/s^2.

a) Calculează lucrul mecanic efectuat de forța de greutate pentru fiecare etapă în parte.

b) Calculează lucrul mecanic total efectuat de forța de greutate pe tot traseul.

c) Realizează graficul L (d), analizează semnul lucrului mecanic în fiecare situație și explică semnificația acestuia.

Rezolvare:

a. Forța de greutate $G = mg$; $G = 20 \cdot 9{,}8$ N = 196 N.

Urcare pe pantă: $h_1 = 5$ m. Forța de greutate este orientată în sens opus deplasării.

Lucrul mecanic al greutății depinde doar de variația de înălțime:

$L_1 = mgh_1 \cdot \cos 180^o = -mgh_1$; $L_1 = -20 \cdot 9{,}8 \cdot 5$ J = – 980 J.

Deplasare pe orizontală: Forța de greutate nu efectuează lucru mecanic deoarece este perpendiculară pe direcția deplasării: $L_2 = 0$.

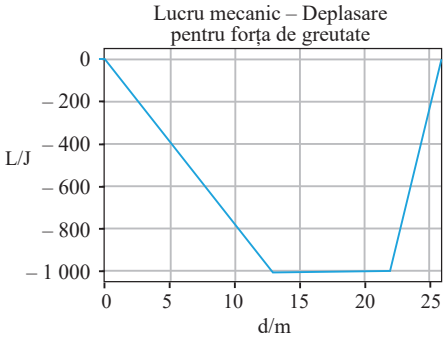
Coborâre pe verticală: $h_3 = 5$ m. Greutatea este orientată în același sens cu sensul deplasării:

$L_3 = mgh_3 \cdot \cos 0^o = mgh_3$; $L_3 = 20 \cdot 9{,}8 \cdot 5$ J = 980 J

b. Lucrul mecanic total al forței de greutate:

$L_t = L_1 + L_2 + L_3$; $L_t = (-980) + 0 + 980$ J = 0 J

c. Pe întregul traseu dus-întors (urcare-coborâre), lucrul mecanic al forței de greutate este nul, deoarece la coborâre are aceeași valoare în modul, dar semn opus față de urcare.



Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la alunecare

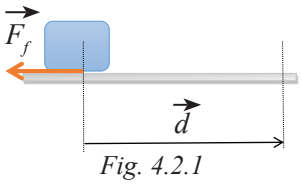


Fig. 4.2.1

Forța de frecare este o forță de contact paralelă cu suprafața și opusă mișcării sau tendinței de mișcare (fig. 4.2.1).

Lucrul mecanic al forței de frecare se poate scrie utilizând relația (4.1.1):

$$L_{F_f} = F_f \cdot d \cdot \cos 180° = -F_f \cdot d \quad (4.2.2),$$

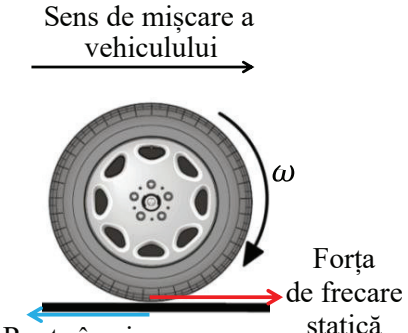
unde cos 180° = – 1.

Observații:

– Lucrul mecanic al forței de frecare este un lucru mecanic rezistent, $L < 0$.

– Prin frecare, energia mecanică a corpului scade și se disipă sub formă de căldură. De exemplu, atunci când frânezi brusc bicicleta, o parte din energia cinetică se transformă prin frecare în căldură, încălzind componentele sistemului de frânare.

Există situații în care forța de frecare joacă rol de forță motoare, iar lucrul mecanic este motor, $L > 0$. Forța de frecare statică poate deveni forță motoare atunci când roata nu alunecă, ci se rostogolește.



De exemplu, în fig. 4.2.2 este reprezentată roata unei mașini care accelerează pe șosea: motorul rotește roțile, iar roțile tind să împingă asfaltul înapoi. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, asfaltul exercită asupra roților o forță orientată înainte. Această forță este frecarea statică; ea asigură tracțiunea și permite accelerarea automobilului, fără alunecarea roților pe șosea.

Energia cinetică a mașinii crește datorită lucrului mecanic efectuat de forța motorului. În sistemul de referință al șoselei, punctul de contact dintre anvelopă și asfalt este instantaneu în repaus; de aceea, frecarea statică nu efectuează lucru mecanic asupra mașinii, ci doar permite transformarea energiei furnizate de motor în mișcare de translație.

Reține
Deși se numește „frecare”, aici nu există alunecare, ci doar aderență (frecare statică).

În aceeași situație putem considera și următoarele exemple în care $L > 0$: un om care aleargă – frecarea împinge piciorul în față, un biciclist care pedalează – aderența roții propulsează bicicleta, mersul normal − frecarea împinge corpul înainte, cățărarea pe munte − mâinile/picioarele se „agață” de rocă.

Lucrul mecanic al forței elastice

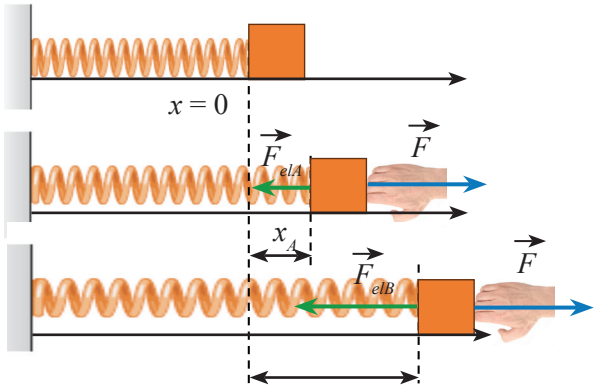


Fig. 4.2.3

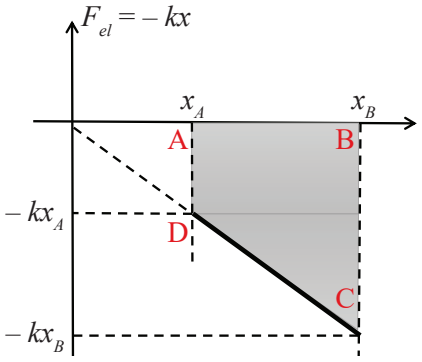


Fig. 4.2.4

Considerăm un resort elastic, de constantă elastică. Sub acțiunea forței $\vec{F}$, resortul se alungește din starea inițială de alungire x_A în starea finală x_B (fig. 4.2.3). În urma deformării elastice (se respectă legea lui Hooke), în resort apare o forță elastică, $\vec{F}_{el}$ variabilă, orientată de-a lungul axei Ox, cu modulul $F_{el} = -k \cdot x$.

Pentru a putea calcula lucrul mecanic al forței elastice, pornim de la semnificația geometrică a lucrului mecanic, adică L, este numeric egal cu aria suprafeței trapezului $ABCD$ (fig. 4.2.4).

$$L_{if} = \frac{[(-kx_A)+(-kx_B)]\cdot(x_B - x_A)}{2} = -\frac{1}{2}\cdot k\cdot(x_B^2 - x_A^2) \quad (4.2.3)$$

Dacă la momentul inițial resortul este nedeformat, $x_A = 0$, iar $x_B = x$, atunci lucrul mecanic al forței elastice se poate scrie sub forma:

$$L_{el} = -\frac{kx^2}{2} \quad (4.2.4)$$

Observații: Semnul „–” se referă la situația în care forța elastică este o ***forță rezistentă.***
Forța elastică poate fi și ***forță motoare,*** de exemplu când un resort inițial comprimat este eliberat. În aceste condiții, relația (4.2.4) devine $L_{el} = \frac{kx^2}{2}$.

PENTRU CURIOȘI:
Calculul lucrului mecanic al unei forțe variabile liniare se poate efectua considerând în expresia lucrului mecanic (4.1.1), forța medie ca media aritmetică a valorilor inițială și finală pe intervalul considerat. Aplicând aceste considerente situației de mai sus, obținem:

$$L_{el} = F_{med}\cdot(x_B - x_A) = \frac{F_A + F_B}{2}\cdot(x_B - x_A),$$

unde $F_A = -kx_A$, $F_B = -kx_B$ și înlocuind, rezultă: $L_{if} = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$.

Observație:

Lucrul mecanic al forței elastice:

– depinde doar de poziția inițială și cea finală a punctul de aplicație al forței;

– nu depinde de tipul de mișcare (uniformă sau neuniformă) cu care a fost parcursă distanța dintre cele două puncte.

APLICĂ

Pe o masă orizontală, netedă (fără frecare), se află un corp, legat de un resort orizontal cu constanta elastică $k = 200$ N/m. Celălalt capăt al resortului este fixat de un perete. Inițial, resortul este nedeformat, iar corpul se află în poziția de echilibru a resortului.

A. Un elev trage încet corpul spre dreapta, până când resortul se alungește cu $x = 0{,}10$ m, și apoi îl menține nemișcat în acea poziție.

a) Calculează modulul forței elastice exercitate de resort asupra corpului.

b) Ce lucru mecanic efectuează forța mâinii elevului în timpul alungirii?

c) Ce lucru mecanic efectuează forța elastică în același interval de timp?

d) Arată, prin semnul lucrului mecanic, că forța elastică acționează ca forță rezistentă în această etapă.

B. După ce a întins resortul, elevul eliberează corpul din poziția $x = 0{,}10$ m. Corpul se pune în mișcare spre stânga, spre poziția de echilibru.

a) Ce lucru mecanic efectuează forța elastică asupra corpului de la $x = 0{,}10$ m până la $x = 0$?

b) Arată, prin semnul lucrului mecanic, că, în această etapă, forța elastică este forță motoare.

Rezolvare:

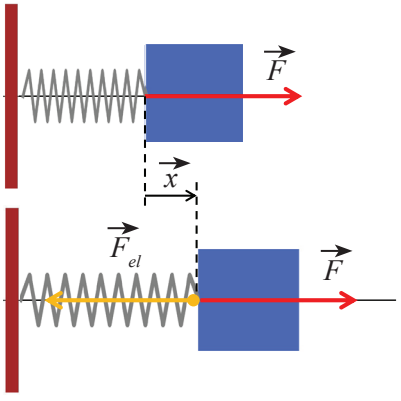
A. Resort alungit

a) Forța elastică crește liniar de la 0 N (la $x = 0$) la 20 N (la $x = 0{,}10$ m).

$F_{el} = k \cdot x \Rightarrow F_{el} = 200 \cdot 0{,}10 = 20$ N.

b) Elevul trage încet, deci mișcarea este aproape uniformă, iar forța exercitată de mână, F, compensează forța elastică. Forța exercitată de mână crește liniar de la 0 la 20 N. Lucrul mecanic al forței F este:

$$L_F = F_{med} \cdot d = \frac{0+F}{2} \cdot d \Rightarrow L_F = \frac{0+20}{2}\,\text{N} \cdot 0{,}1\,\text{m} = 1\,\text{J}$$



c) Forța elastică are sens opus deplasării => $\alpha = 180^\circ$, $\cos 180^\circ = -1$.

$$L_{F_{el}} = F_{el,med} \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -\frac{0+F_{el,\max}}{2} \cdot d \Rightarrow L_{F_{el}} = -1{,}0\,\text{J}$$

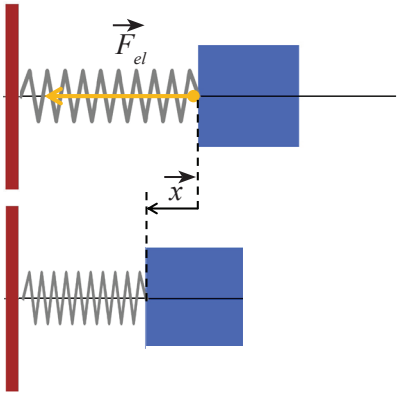
d) Lucrul mecanic al forței elastice este negativ $\Rightarrow$ F_{el} readuce resortul la forma inițială, deci este forță rezistentă.

B. Resort comprimat

Resortul este eliberat din poziția alungită ($x = 0{,}10$ m) și se deplasează spre stânga cu $d = 0{,}10$ m, până revine la starea de resort nedeformat. Forța elastică este orientată tot spre stânga, în același sens cu deplasarea.

În această situație, forța elastică variază de la 20 N (la început) la 0 N (la poziția de echilibru), iar $\alpha = 0^\circ$ => $\cos 0^\circ = 1$.

b) Lucrul mecanic al forței elastice este pozitiv $\Rightarrow$ F_{el} contribuie la revenirea resortului la forma inițială, deci este forță motoare.



Forțe conservative, forțe neconservative

Atât lucrul mecanic al forței de greutate, cât și cel al forței elastice sunt independente de drumul parcurs de corp și/sau de legea de mișcare a acestuia.

Definiție

Forța care acționează asupra unui punct material și efectuează un lucru mecanic independent de forma drumului parcurs și de legea de mișcare, depinzând doar de pozițiile punctelor extreme ale traiectoriei, se numește **forță conservativă**.

Exemple: forța de atracție gravitațională, forța elastică, forța electrostatică etc.

Nu toate forțele sunt conservative. Să considerăm forța de frecare care acționează asupra unei lăzi ce alunecă pe o rampă. Atunci când lada alunecă în sus pe rampă și apoi revine la poziția inițială, lucrul mecanic total efectuat asupra ei de forța de frecare **nu este nul**. În momentul în care sensul mișcării se inversează, se schimbă și sensul forței de frecare, însă aceasta realizează **lucru mecanic negativ** în ambele sensuri ale mișcării. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare (în modul) este cu atât mai mare cu cât lungimea **drumului** parcurs este mai mare! Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare se disipă în mediul înconjurător sub formă de căldură, prin urmare, forța de frecare este o forță disipativă!

Asemenea forței de frecare la alunecare, **forța de rezistență la mișcarea într-un fluid** nu este o forță conservativă. Dacă arunci o minge în sus, rezistența aerului efectuează **un lucru mecanic negativ** asupra mingii atât în timpul urcării, cât și în timpul coborârii. Mingea revine în mână cu o viteză mai mică decât cea inițială, iar energia mecanică pierdută nu poate fi recuperată.

Reține

Forțele **neconservative** sunt acele forțe mecanice pentru care **lucrul mecanic depinde și de forma drumului parcurs**, nu doar de pozițiile inițială și finală.

Exemple de forțe neconservative: forța de frânare aplicată extern, forța de frecare, forțele de rezistență a aerului/apei (forțe de amortizare).

Observații:

• Pe un drum închis, lucrul mecanic al unei forțe neconservative este diferit de zero: $L \neq 0$.

• Forțele neconservative produc pierderi sau transformări de energie mecanică (de obicei, în căldură, deformări, sunet), deci suma dintre energia cinetică și cea potențială nu mai rămâne constantă.

Exemplu

Imaginează-ți două mingi identice care sunt ridicate de la sol pe o masă.

• Prima minge este ridicată vertical, direct în sus.

• A doua minge este împinsă pe o rampă lungă, până ajunge pe aceeași masă.

În ambele cazuri, punctul inițial și punctul final sunt la aceleași înălțimi. De aceea, lucrul mecanic al greutății este același, chiar dacă drumurile parcurse sunt diferite. Forța de greutate este o forță conservativă.

Dacă însă mingea este împinsă pe rampă, apare frecarea. Cu cât rampa este mai lungă sau suprafața este mai aspră, cu atât lucrul mecanic al forței de frecare este mai mare în modul. Frecarea depinde de drumul parcurs, deci este o forță neconservativă.

Concluzie:

• Lucrul mecanic al forței de greutate depinde doar poziția inițială și poziția finală.

• Lucrul mecanic al forței de frecare depinde de drumul parcurs.

4.3. Puterea mecanică. Randamentul

Definiția lucrului mecanic nu face nicio referire la intervalul de timp în care acesta se efectuează. Dacă ridicăm o halteră cu greutatea de 100 N pe o distanță verticală de 1,0 m, cu viteză constantă, lucrul mecanic efectuat este indiferent dacă ridicarea durează 1 s, 1 oră sau 1 an. În multe situații însă, este important să știm cât de repede se efectuează lucrul mecanic. Această mărime se numește putere.

Definiție

Puterea medie în intervalul de timp Δt este mărimea fizică scalară P, definită prin relația: $P = \frac{L}{\Delta t}$ (4.3.1), unde L este lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp Δt.

Unitatea de măsură pentru putere este: $[P]_{SI} = \frac{[L]_{SI}}{[\Delta t]_{SI}} = \frac{J}{s} = W\ (watt)$ (4.3.2)

Reține

Un watt este puterea mecanică produsă de o forță care efectuează un lucru mecanic de 1 joule în timp de o secundă.

Observații:

– Puterea medie se mai poate scrie: $P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}_m$ (4.3.3)

– În relația (4.3.3) am notat cu $\vec{v}_m$ viteza medie a punctului de aplicație al forței $\vec{F}$.

– Considerând intervalul Δt foarte mic, puterea instantanee se scrie:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.3.4)$$

O unitate de măsură folosită mai ales în domeniul auto este numită *cal-putere*, cu simbolul CP[1] (în limba engleză *horse-power* − HP): 1 CP ≅ 736 W.

În practică se utilizează o unitate suplimentară de măsură a lucrului mecanic, numită *kilowatt-oră* (kWh), care poate fi transformată în jouli:

$$1\ kWh = 1000\ W \cdot 3600\ s = 3600000\ J = 3{,}6\ MJ$$

Randamentul ridicării unui corp pe planul înclinat

Conform Dicționarului explicativ al limbii române, în limbajul comun, randamentul (*eficiență*, *profit, beneficiu*) reprezintă raportul dintre efectul obținut și efortul depus într-o activitate. Același înțeles al cuvântului randament se păstrează și în fizică, adaptat însă la descrierea eficienței transferului de energie între sisteme fizice.

Definiție

Randamentul mecanic se definește ca raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat.

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} \quad (4.3.5),$$

unde **lucrul mecanic consumat**, L_c, este lucrul mecanic efectuat de forța motoare (de exemplu, forța de tracțiune) asupra mecanismului la deplasarea punctului de aplicație; **lucrul mecanic util, L_u**, este lucrul mecanic care produce efectul urmărit, de regulă, lucrul mecanic efectuat împotriva forței rezistente.

Observații:

– Relația (4.3.5) se mai poate scrie $\eta = \frac{P_u}{P_c}$, ținând cont de definiția puterii mecanice.

– Randamentul mecanic este o mărime scalară adimensională (nu are unitate de măsură) și se poate exprima în procente.

– În condiții reale, o parte din L_c se pierde prin frecări și alte efecte nedorite de utilizator, deci: $L_u \leq L_c \Rightarrow \eta \leq 1$. În absența frecărilor, $\eta = 1$.

[1] *cal-putere* – reprezintă puterea unei forțe care ridică uniform un corp cu masa de 75 kg, la înălțimea de un metru, în timp de o secundă

În cele ce urmează, vom aplica relația (4.3.5) pentru a calcula randamentul ridicării unui corp pe planul înclinat.

Considerăm un punct material de masă m care urcă uniform pe un plan înclinat de unghi α, sub acțiunea unei forțe paralele cu planul, $\vec{F}$, ca în fig. 4.3.1. Având în vedere că mișcarea pe planul înclinat este uniformă, putem afla expresia forței F din relațiile:

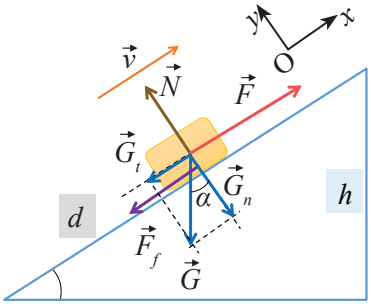


Fig. 4.3.1

$$\begin{cases} Ox: F = G_t + F_f \\ Oy: N = G_n \end{cases} \Rightarrow F = m \cdot g \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ este **consumat** pentru ridicarea corpului în câmp gravitațional terestru la înălțimea h și pentru a învinge forța de frecare pe lungimea planului înclinat, d.

$$L_c = F \cdot d = m \cdot g \cdot d \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Lucrul mecanic util este efectuat pentru ridicarea corpului în câmp gravitațional pe distanța $h = d \cdot \sin\alpha$.

$$|L_u| = G \cdot h = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot d \cdot \sin\alpha \quad (4.3.7)$$

Înlocuind (4.3.6) și (4.3.7) în relația (4.3.5), obținem:

$$\eta = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{1}{1 + \mu \cdot \mathrm{ctg}\alpha} \quad (4.3.8)$$

Din relația (4.3.8) se poate observa că, în prezența frecării, randamentul este totdeauna subunitar.

EXPERIMENTEAZĂ: Determinarea randamentului ridicării uniforme a unui corp pe planul înclinat

Materiale necesare: tribometru, corp paralelipipedic din lemn cu cârlig cu masă cunoscută, dinamometru, calculator.

Considerente teoretice:

Randamentul unui plan înclinat este definit prin relația (4.3.5).

Pentru planul înclinat din fig. 4.3.2, L_u este lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a corpului care este ridicat pe plan, iar L_c este lucrul mecanic al forței de tracțiune. În aceste condiții, randamentul planului înclinat este:

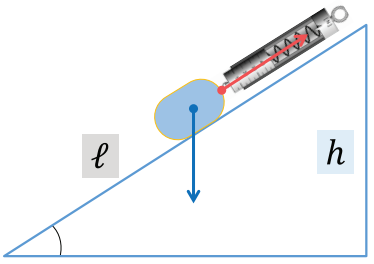


Fig. 4.3.2

$$\eta = \frac{Mgh}{Fl} = \frac{Mg\sin\alpha}{F} \quad (4.3.9)$$

Mod de lucru:

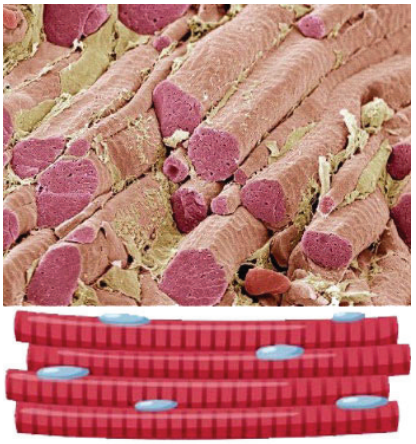
- Fixați tribometrul în poziție înclinată sub un anumit unghi.
- Așezați corpul paralelipipedic pe planul înclinat, fixați dinamometrul de cârlig și deplasați uniform corpul de-a lungul planului de la bază în sus.
- Înregistrați în tabelul de mai jos valorile masei corpului M, ale forței de tracțiune F și ale unghiului α.
- Repetați etapele de mai sus pentru diferite înclinări ale planului înclinat.
- Înregistrați datele obținute, calculați randamentul planului, efectuați calculul incertitudinilor și formulați concluzii. Identificați sursele de erori.

Tabel de date

Nr. crt.	M/kg	F/N	α	sinα	η	$\bar{\eta}$	$\Delta\eta = \lvert\bar{\eta} - \eta\rvert$	$\Delta\bar{\eta}$

APLICAȚIE BIO – Lucrul mecanic și fibrele musculare

Capacitatea noastră de a efectua lucru mecanic cu ajutorul corpului provine din mușchii scheletici. Celulele alungite, asemănătoare fibrelor, ale mușchiului scheletic – prezentate în această micrografie – se pot scurta, determinând contracția mușchiului ca întreg și generând o forță transmisă tendoanelor de care acesta este atașat. Un mușchi poate exercita o forță medie de aproximativ 0,3 N/mm^2 din aria secțiunii transversale. Cu cât aria secțiunii transversale este mai mare, cu atât mușchiul conține mai multe fibre musculare și, prin urmare, poate genera o forță mai mare în timpul contracției.



APLICĂ

Un corp cu greutatea $G = 500$ N este tras uniform în sus pe un plan înclinat de lungime $l = 5{,}0$ m și înălțime $h = 2{,}0$ m, folosind o forță de tracțiune F, paralelă cu planul. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}15$.

Cerințe:

1. Calculează forța de frecare.
2. Determină forța de tracțiune F necesară pentru mișcare uniformă.
3. Calculează lucrul mecanic consumat L_c efectuat de forța de tracțiune pe distanța l.
4. Calculează lucrul mecanic util L_u.
5. Determină randamentul urcării pe planul înclinat. Verifică respectarea regulilor pentru numărul de cifre semnificative.

Rezolvare:

1. Aflăm forța de reacțiune normală, apoi forța de frecare:

$$N = G \cdot \cos\alpha \Rightarrow N \cong 258 \text{ N}, F_f = \mu \cdot N \Rightarrow F_f = 0{,}15 \cdot 458 \text{ N} \cong 69 \text{ N}.$$

2. Forța de tracțiune F pentru mișcare uniformă:

– Componenta greutății pe direcția planului: $G_{tg} = G \cdot \sin\alpha = G \cdot \dfrac{h}{l} \Rightarrow G_{tg} = 200$ N.

– La urcarea pe plan, atât G_{tg}, cât și F_f sunt orientate în jos pe plan, deci: $F = G_{tg} + F_f \Rightarrow F = 269$ N.

a. Lucrul mecanic consumat, L_c: $L_c = F \cdot l \Rightarrow L_c = 269 \cdot 5{,}0$ J $= 1345$ J.

b. Lucrul mecanic util, L_u: $|L_u| = G \cdot h \Rightarrow |L_u| = 500 \cdot 2{,}0$ J $= 1000$ J.

c. Randamentul, η: $\eta = \dfrac{L_u}{L_c}$

$$\eta = \frac{1000}{1345} \approx 0{,}743 \approx 74{,}3\%$$

Pentru a respecta cerința numărului de cifre semnificative, trebuie să scriem $L_c = 1{,}3 \cdot 10^3$ J, prin urmare, $\eta \approx 0{,}74 \approx 74\%$.

4.4. Energia cinetică. Teorema variației energiei cinetice

Definiție

Energia cinetică este energia pe care o are un corp datorită mișcării sale, în raport cu un sistem de referință inerțial dat. Expresia matematică a *energiei cinetice* este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \quad (4.4.1)$$

Unitatea de măsură pentru energia cinetică în Sistemul Internațional este *joule* (J).

Observații:

– Energia cinetică a unui corp de masă dată, aflat în mișcare, este o mărime fizică scalară, la fel ca lucrul mecanic, și depinde de mărimea vitezei corpului, nu de direcție și sens. Din acest motiv, **energia cinetică este o mărime care caracterizează starea mecanică a corpului**.

– Un corp aflat în repaus nu are energie cinetică ($E_c = 0$).

– Energia cinetică a unui corp este totdeauna pozitivă și depinde de sistemul de referință ales.

Imaginați-vă un șofer conducând o mașină. În timpul deplasării, mașina are viteză, prin urmare, are energie cinetică. Când frânează, șoseaua exercită asupra roților o forță de frecare orientată in sens opus sensului de mișcare. Frânele acționează asupra mașinii și îi reduc energia cinetică. În mod similar, atunci când accelerează, motorul (acționând prin roți) exercită o forță orientată pe direcția și în sensul mișcării. Forța produsă de motor efectuează lucru mecanic asupra mașinii și îi crește energia cinetică. Dacă mașina se deplasează cu viteză constantă pe o curbă, are aceeași energie cinetică înainte și după curbă. Energia cinetică rămâne aceeași pe durata deplasării pe curbă. Forța centripetă este perpendiculară pe viteză, deci nu efectuează lucru mecanic și nu modifică energia cinetică a mașinii.

Vom considera o mișcare unidimensională în care o forță este folosită pentru a accelera un obiect într-o direcție paralelă cu viteza sa inițială. O astfel de situație apare pentru corpul aflat pe o suprafață orizontală ca în fig. 4.4.1. Forțele de greutate și normala care acționează asupra corpului sunt perpendiculare pe direcția deplasării și nu efectuează lucru mecanic. Mai mult, ele sunt egale în modul și opuse ca sens, deci forța rezultantă pe direcție verticală este nulă.

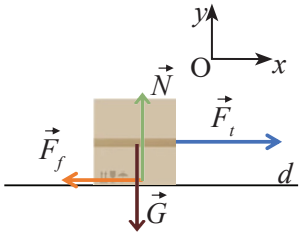


Fig. 4.4.1

Forța rezultantă este determinată doar de forța de tracțiune aplicată orizontal, $\vec{F}_t$, și de forța de frecare, $\vec{F}_f$, și este paralelă cu deplasarea, deci $\alpha = 0°$ și $\cos\alpha = 1$, prin urmare, lucrul mecanic total este de forma: $L_{total} = F \cdot d$, unde $F = F_t - F_f$.

Efectul forței rezultante este de a accelera corpul de la viteza v_0 la viteza v. Energia cinetică a corpului crește, ceea ce indică faptul că lucrul mecanic total efectuat asupra sistemului este pozitiv.

Din principiul fundamental, știm că $F = ma$ și înlocuind în expresia lucrului mecanic total, obținem:

$$L_{total} = ma \cdot d \quad (4.4.2)$$

Din ecuația lui Galilei, $v^2 = v_0^2 + 2ad$, obținem $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$, care, înlocuită în relația (4.4.2), conduce la expresia:

$$L_{total} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{cf} - E_{ci} \quad (4.4.3)$$

Enunț

Variația energiei cinetice a unui punct material care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, între stările inițială și finală, este egală cu lucrul mecanic al forței rezultante care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații.

$$L_{if} = \Delta E_c \quad (4.4.4)$$

Relația (4.4.4) este numită **teorema de variație a energiei cinetice**, iar ea se aplică, în general, și pentru forțe care variază ca direcție și în modul.

Observații:

– În relația (4.4.4), variația energiei cinetice $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$, reprezintă diferența dintre energia cinetică a corpului în starea finală, E_{cf} și energia cinetică în starea inițială, E_{ci}.

– Din relația (4.4.4) se observă că, atunci când asupra unui corp acționează o forță motoare ($L > 0$), energia cinetică a corpului crește, iar când acționează o forță rezistentă ($L < 0$), energia cinetică scade.

Reține

Lucrul mecanic efectuat de o forță determină o variație de energie. **Energia** este o **mărime fizică de stare**.

Lucrul mecanic este o mărime fizică de proces deoarece depinde de drumul parcurs.

APLICĂ

1. Un biciclist pornește din starea de repaus și după d = 30 m atinge viteza v = 10,8 km/h. Greutatea bicicletistului și a bicicletei fiind egală cu 784 N, să se afle forța dezvoltată de biciclist, în absența frecărilor. Se va considera g ≅ 10 m/s^2.

Rezolvare:

Variația energiei cinetice a bicicletistului este: $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = L_t$, unde $L_t = F_{bic} \cdot d$.

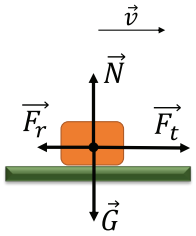
$\frac{mv^2}{2} - 0 = F_{bic} \cdot d \Rightarrow F_{bic} = \frac{mv^2}{2d}$. Din calculele numerice, rezultă: F_{bic} = 11,76 N.

2. O locomotivă de masă de 30 t pornește din repaus și se deplasează pe un drum orizontal. Forțele de rezistență la înaintare se consideră proporționale cu greutatea locomotivei, iar coeficientul de proporționalitate este k = 0,02. Locomotiva ajunge la viteza de 36 km/h după ce parcurge distanța d = 160 m. Să se calculeze: a) puterea medie a forței de tracțiune pe intervalul considerat; b) distanța parcursă până la oprire, dacă în momentul în care atinge viteza de 36 km/h încetează acțiunea forței de tracțiune și locomotiva rămâne supusă numai forțelor de rezistență la înaintare; c) lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență la înaintare pe întregul parcurs. Se consideră g ≅ 10 m/s^2.

Rezolvare:

a. Variația energiei cinetice a trenului este: $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = L_t$.

Asupra locomotivei, pe direcția de mișcare, acționează forțele de tracțiune și de rezistență la înaintare. Prin urmare, variația energiei cinetice este:



$$\frac{mv^2}{2} - 0 = (F_t - F_r) \cdot d \Rightarrow F_t = \frac{mv^2}{2d} - F_r, \text{ unde } F_r = kmg.$$

Din calculele numerice, obținem F_t = 15375 N.

Puterea medie este $P = F \cdot \overline{v}$, unde $\overline{v} = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2}$, iar din calcule rezultă: P = 76875 W.

b. Aplicăm din nou teorema variației energiei cinetice, unde, în această situație, $E_{cf} = 0$, $E_{ci} = \frac{mv^2}{2}$, iar $L_{total} = L_{Fr} = -kmgd_{op}$. Vom obține: $-\frac{mv^2}{2} = -kmgd_{op} \Rightarrow d_{op} = \frac{v^2}{2kg}$.

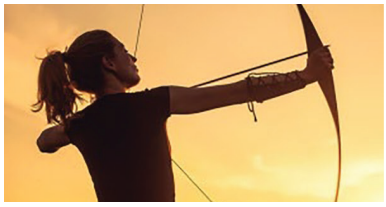
Din calculele numerice rezultă: d_{op} = 250 m.

c. Lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență la înaintare este $L_{Fr} = -kmg \cdot (d + d_{op})$, iar din calculul numeric, obținem: L_{Fr} = – 2,46 MJ.

4.5. Energia potențială

Energia potențială a unui sistem fizic este determinată de forțele de interacțiune dintre părțile componente ale sistemului. Ea depinde de poziția pe care o au componentele sistemului unele față de altele (forma sistemului).

Sub acțiunea unor forțe, **corpurile se deformează** (de exemplu, un arc, o prăjină). Spunem că acele corpuri acumulează **energie potențială elastică** (de deformare).





Apa care stă în lacul de acumulare al unei hidrocentrale este în repaus față de Pământ și nu are energie cinetică. Dar atunci când este lăsată să curgă liber prin conducta de aducțiune, este accelerată de acțiunea greutății și ajunge la hidrocentrală cu viteză mare și cu energie cinetică mare, pe care o transmite turbinei generatorului electric. Sistemul fizic format din apa din lacul de baraj și Pământ, are o „formă" caracterizată prin diferența mare de înălțime între lac și turbina hidrocentralei. Sub acțiunea forței gravitaționale are loc **modificarea poziției apei** față de Pământ (modificarea formei) și **energia potențială gravitațională** a sistemului apă-Pământ este transformată în energie cinetică a apei. Același lucru îl putem vedea în cazul trenulețului unui roller-coaster. Când trenulețul urcă spre un loc cu înălțime mare de pe traseul roller-coaster-ului, spunem că **acumulează energie potențială gravitațională**. Când trenulețul coboară, spunem că își transformă energia potențială gravitațională în energie cinetică.




4.5.1. Energia potențială gravitațională

În fig. 4.5.1 se poate observa o carte care este deplasată pe verticală în jos, cu viteză constantă, sub acțiunea forței de greutate. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este:

$$L_G = \vec{G} \cdot \vec{d} = -mg\Delta h$$

$$L_G = -(mgh_f - mgh_i) \quad (4.5.1)$$

Dacă facem notația $E_p = mgh$ și numim această mărime fizică **energie potențială gravitațională** a sistemului carte-Pământ, observăm că lucrul mecanic al greutății se poate exprima astfel:

$$L_G = -(E_{pf} - E_{pi}) = -\Delta E_p \quad (4.5.2)$$

Putem spune că lucrul mecanic al forței de greutate este însoțit de o variație a energiei potențiale a sistemului.

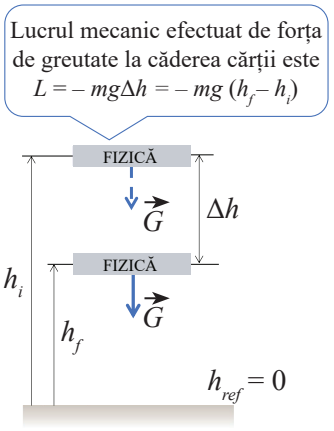


Fig. 4.5.1

Definiție

Energia care depinde de poziția corpului în câmp gravitațional și care este datorată acțiunii acestuia asupra corpului se numește **energie potențială gravitațională** și este o **mărime fizică de stare.**

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = -L_{if} \quad (4.5.3),$$

unde L_{if} reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța de greutate la trecerea din starea inițială h_i în starea finală h_f (stabilite față de nivelul de referință ales, $h_{ref} = 0$).

Introducând relația (4.5.1) în relația (4.5.3), obținem $E_{pf} - E_{pi} = -(mgh_i - mgh_f)$, de unde rezultă:

$$E_{pf} - mgh_f = E_{pi} - mgh_i = \text{constant} \Rightarrow$$

$$E_p(h) = mgh + \text{constantă} \quad (4.5.4)$$

Energia potențială gravitațională caracterizează starea mecanică a sistemului corp-Pământ. Din cauza comodității de exprimare, se folosește adesea expresia incompletă „energia potențială gravitațională a corpului”.

Observație:

Din definiția (4.5.3) se observă că prin lucrul mecanic se pot determina doar variații ale energiei potențiale, astfel că energia potențială nu poate fi determinată exact, ci doar până la o constantă aditivă, conform relației (4.5.4). Prin convenție, se poate determina această constantă.

Convenție:

Configurația căreia îi corespunde o energie potențială nulă este aleasă arbitrar. În majoritatea situațiilor se stabilește $E_{pg} = 0$ pentru înălțimea cea mai joasă la care se află corpul față de Pământ.

Ținând cont de convenția aleasă, energia potențială gravitațională are expresia: $E_p(h) = mgh$ (4.5.5), unde h reprezintă înălțimea la care se află corpul față de nivelul de referință ales.

4.5.2. Energia potențială elastică

În fig. 4.5.2 este reprezentat un resort elastic orientat de-a lungul axei Ox. Lucrul mecanic pe care noi (forța $\vec{F}$) trebuie să îl efectuăm asupra arcului pentru a deplasa un capăt de la o alungire x_i la o alungire diferită x_f este:

$$L = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (4.5.6)$$

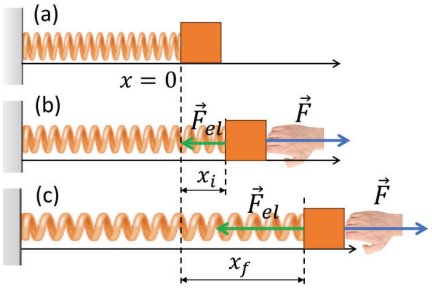


Fig. 4.5.2

(lucrul mecanic efectuat asupra arcului), unde k este constanta elastică a arcului. Dacă întindem arcul mai mult, efectuăm lucru mecanic pozitiv asupra arcului.

Conform principiului acțiunii și al reacțiunii, lucrul mecanic efectuat **de forța elastică** este exact opusul lucrului mecanic efectuat **de forța deformatoare** și observăm că, pentru o deplasare de la x_i la x_f, forța elastică care acționează asupra arcului efectuează un lucru mecanic L_{el} dat de:

$$L_{el} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (4.5.7)$$

(lucrul mecanic efectuat de forța elastică).

Definiție

Energia care depinde de poziția corpului în câmpul forțelor elastice, prin urmare, de deformarea resortului, și este datorată interacțiunii dintre corp și câmpul forțelor elastice, se numește **energie potențială elastică** și este o **mărime fizică de stare.**

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = -L_{if} \quad (4.5.8),$$

unde L_{if} reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța elastică la trecerea din starea inițială de deformare a resortului, x_i în starea finală de deformare a resortului, x_f.

Introducând relația (4.5.7) în (4.5.8), obținem:

$$E_{pf} - E_{pi} = -\left(\frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2\right) \Rightarrow E_{pf} - \frac{1}{2}kx_f^2 = E_{pi} - \frac{1}{2}kx_i^2 = \text{constant}$$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{constantă} \quad (4.5.9)$$

Observație:

Din definiția (4.5.8) se observă că prin lucrul mecanic se pot determina doar variații ale energiei potențiale, astfel că energia potențială nu poate fi determinată exact, ci doar până la o constantă aditivă, conform relației (4.5.9). Prin convenție, se poate determina această constantă.

Convenție:

Configurația căreia îi corespunde o energie potențială nulă corespunde stării în care resortul este nedeformat: $x = 0 \Rightarrow E_p(0) = 0$. Ținând cont de convenția stabilită, energia potențială elastică în câmpul forțelor elastice este:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.5.10)$$

În fig. 4.5.3 este reprezentat graficul energiei potențiale elastice funcție de deformare, $E_p(x)$. Ținând cont de expresia matematică a energiei potențiale, graficul este un arc de parabolă cu vârful în punctul (0, 0). Din grafic se observă că energia potențială este totdeauna pozitivă.

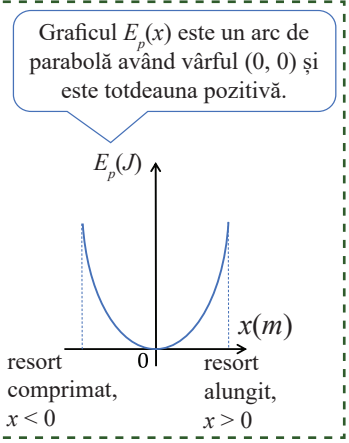
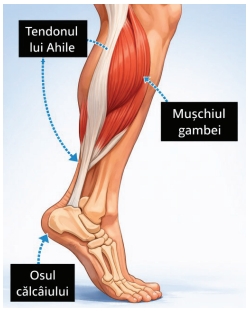


Fig. 4.5.3

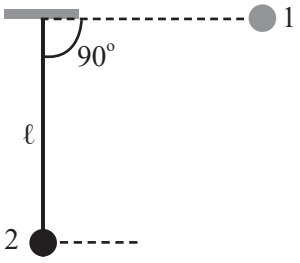
APLICAȚIE BIO – Energia potențială elastică



Tendonul lui Ahile, care se întinde de-a lungul părții din spate a gleznei până la osul călcâiului, acționează ca un arc natural. Atunci când se întinde și apoi se relaxează, acest tendon înmagazinează și eliberează energie potențială elastică. Această acțiune de tip „arc" reduce lucrul mecanic pe care mușchii piciorului trebuie să îl facă atunci când alergi.

APLICĂ

1. Un corp de masă $m = 0{,}4$ kg este suspendat prin intermediul unui fir de lungime $\ell = 1$ m. Ce lucru mecanic efectuează greutatea corpului la deplasarea lui în plan vertical, din poziția 2 în poziția 1? Cu cât s-a modificat energia potențială a sistemului corp-Pământ?



Rezolvare: Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate din poziția 2 în poziția 1 este: $L_G = -mg\ell$

$$L_G = -0{,}4\ \text{kg} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\ \text{m} = -4\ \text{J}.$$

Aplicând teorema variației energiei potențiale, rezultă: $\Delta E_{pg} = -L_G \Rightarrow \Delta E_{pg} = 4$ J.

2. Un corp cu masa de 250 g este aruncat vertical în sus, de la suprafața Pământului și, în absența frecărilor, ajunge la înălțimea maximă de 15 m. Aflați energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ la înălțimea maximă.

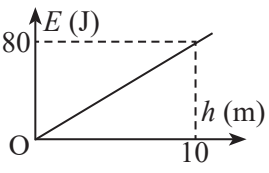
Rezolvare: Stabilim nivelul de energie potențială nulă la suprafața Pământului. În aceste condiții, energia potențială gravitațională este $E_{pg} = mgh$, iar din calculele numerice, rezultă:

$$E_{pg} = 0{,}25\ \text{kg} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15\ \text{m} = 37{,}5\ \text{J}.$$

3. Energia potențială înmagazinată într-un resort comprimat este de 900 J. Calculați constanta elastică a resortului dacă acesta a fost comprimat cu 30 cm.

Rezolvare: Energia potențială elastică este: $E_{pe} = \frac{kx}{2}$, de unde rezultă: $k = \frac{2E_{pe}}{x^2}$.

Din calculele numerice, după efectuarea transformărilor de unități de măsură în SI, obținem: $k = 20$ kN/m.



4. În graficul alăturat este reprezentată energia potențială a unui sistem mecanic corp-Pământ în funcție de înălțimea față de sol. Determinați masa corpului și energia potențială la o înălțime de 8 m.

Rezolvare: Din grafic se observă că la înălțimea $h = 10$ m, energia potențială gravitațională este $E_{pg} = 80$ J și aplicând relația $E_{pg} = mgh$, obținem: $m = \frac{E_{pg}}{gh} \Rightarrow m = 0{,}8$ kg.

4.6. Energia mecanică. Teorema de variație a energiei mecanice. Legea conservării energiei mecanice

Energia unui corp se modifică atunci când forțele care acționează asupra acestuia efectuează un lucru mecanic. Energia există într-o varietate de forme, pe care le putem clasifica, în diferite proporții, ca energie cinetică sau energie potențială: energie solară, energie termică, energie potențială gravitațională, energie nucleară, energie potențială chimică, energie sonoră, energie electrică, energie potențială elastică, energie luminoasă și așa mai departe (fig. 4.6.1). În toate cazurile, energia se poate transforma dintr-o formă în alta sau se poate transfera energie de la un corp la altul prin efectuarea de lucru mecanic.

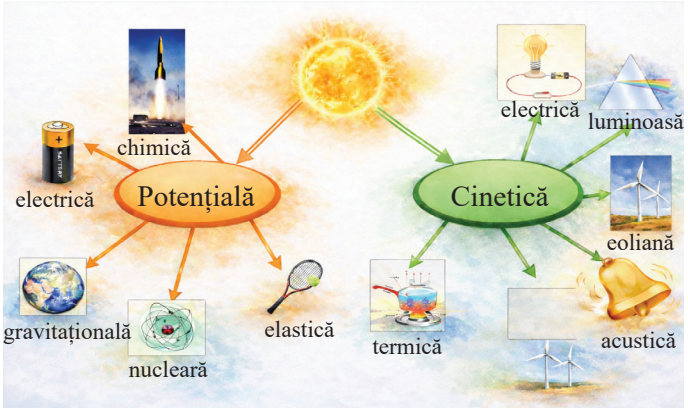


Fig. 4.6.1

Definiție

Energia mecanică totală a unui sistem se definește ca suma tuturor energiilor potențială și cinetică ale sistemului.

$$E = E_p + E_c \quad (4.6.1)$$

Legea conservării energiei

În continuare, vom analiza ce se întâmplă cu energia mecanică dintr-un sistem atunci când doar forțele conservative produc transferuri de energie în interiorul sistemului – adică atunci când forțele de frecare și de rezistență ale mediului nu acționează asupra corpurilor din sistem. De asemenea, vom presupune că sistemul este izolat față de mediul înconjurător, astfel că lucrul mecanic al forțelor externe este nul.

Scanează codul QR alăturat pentru a afla despre experimentele care au condus la formularea legii conservării energiei.

Atunci când numai o *forță conservativă* efectuează un lucru mecanic L asupra unui corp din sistem, acea forță transferă energie între energia cinetică E_c a obiectului și energia potențială E_p a sistemului.

Dacă combinăm teorema variației energiei cinetice (4.4.4.) cu definiția energiei potențiale pentru forțe conservative (4.5.7), observăm că $L_{if} = E_{cf} - E_{ci} = -E_{pf} + E_{pi}$, de unde rezultă:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{cf} + E_{pf} = \text{constant} \quad (4.6.2)$$

Enunț

Într-un sistem izolat, în care doar forțele conservative produc modificări ale energiei, energia cinetică și energia potențială se pot modifica, dar suma lor – energia mecanică E a sistemului – rămâne constantă, deci se conservă. Energia nu poate fi creată sau distrusă, ea se poate transforma dintr-o formă în altă formă.

Teorema de variație a energiei mecanice

Vom analiza în continuare ce se întâmplă atunci când într-un sistem mecanic izolat acționează și forțe neconservative, iar energia mecanică nu se mai conservă.

Ținând cont de relațiile (4.4.4), (4.5.3) și (4.5.8.), putem scrie următoarele:

$$\Delta E_c = L_{cons} + L_{necons} \text{ și } \Delta E_p = -L_{cons} \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = L_{necons} \Rightarrow \Delta E = L_{necons}$$

Enunț

Într-un câmp de forțe conservative, în care acționează și forțe neconservative, variația energiei mecanice, $E = E_p + E_c$, a unui sistem izolat este egală cu lucrul mecanic total al forțelor neconservative care acționează asupra sistemului.

$$\Delta E = L_{neconservativ} \quad (4.6.3)$$

EXPERIMENTEAZĂ: Verificarea teoremei de variație a energiei cinetice/mecanice a unui corp.

Scopul lucrării: verificarea experimentală a teoremei variației energiei cinetice pentru un corp care se deplasează pe un plan înclinat, ținând cont de forța de frecare, și evidențierea dependenței liniare dintre distanța parcursă pe planul orizontal și lungimea planului înclinat.

Materiale necesare: plan înclinat reglabil, plan orizontal, șaibă/piuliță/disc crestat de 5 g, hârtie milimetrică pentru fixare pe plan (A3) și pentru realizare grafic (A4), riglă, raportor.

Noțiuni teoretice

Conform teoremei variației energiei cinetice, variația energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele care acționează asupra acestuia: $\Delta E = L$

Pentru un corp de masă m care alunecă pe un plan înclinat de unghi α lungime ℓ, variația energiei cinetice este: $\frac{mv^2}{2} = mgh - \mu mg \cdot \cos\alpha \cdot \ell$

Din relația geometrică: $\sin\alpha = \frac{h}{\ell} \Rightarrow h = l \cdot \sin\alpha$

Rezultă: $\frac{mv^2}{2} = mg\ell \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

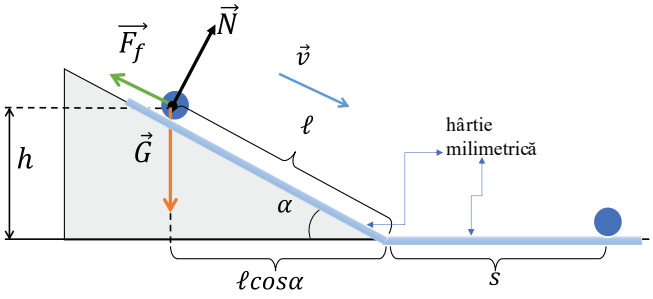
Pe planul orizontal, energia cinetică se consumă prin lucrul forței de frecare: $\frac{mv^2}{2} = \mu mgs$

Egalând cele două expresii: $\mu mgs = mg\ell \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$,

se obține: $\frac{s}{\ell} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu} = \text{constant.}$

Mod de lucru:

1. Se montează planul înclinat astfel încât să se continue cu un plan orizontal. Pe ambele planuri se fixează hârtie milimetrică.
2. Se notează pe hârtie milimetrică poziția de plecare a corpului pe planul înclinat.
3. Se notează pe hârtie milimetrică punctul de intersecție a planului înclinat cu cel orizontal.
4. Corpul este lăsat liber să alunece pe planul înclinat.



5. Se măsoară lungimea planului înclinat, ℓ.
6. Se măsoară distanța parcursă de corp pe planul orizontal până la oprire.
7. Se repetă experimentul pentru mai multe valori ale lui ℓ.
8. Se reprezintă grafic dependența $s = f(\ell)$.

Tabel de date

Nr. det.	ℓ/m	s/m

Prelucrarea datelor: Se trasează graficul $s = f(\ell)$. Graficul obținut este o dreaptă ce trece prin origine, confirmând proporționalitatea directă dintre s și ℓ.

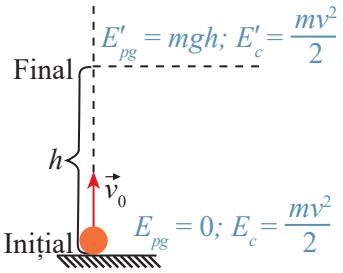
Concluzii: Rezultatele experimentale confirmă teorema variației energiei cinetice. Raportul $\frac{s}{\ell}$ este constant pentru valori fixe ale unghiului planului înclinat și ale coeficientului de frecare. Dependența dintre s și ℓ este liniară.

Surse de erori: Neuniformitatea suprafeței planului, traiectoria corpului nu este rectilinie în raport cu axa de simetrie a planului, erori de citire a distanțelor, pierderi suplimentare de energie (vibrații, aer).

APLICĂ

1. Un corp este aruncat, de la suprafața pământului, vertical în sus cu viteza $v_0 = 30$ m/s. La ce înălțime energia sa cinetică este egală cu energia potențială? Se neglijează frecarea cu aerul. Se va considera accelerația gravitațională, $g = 10$ m/s².

Rezolvare:



Vom realiza un desen în care vom marca stările inițială/finală și energiile în fiecare stare. Din datele problemei, în starea finală știm că:

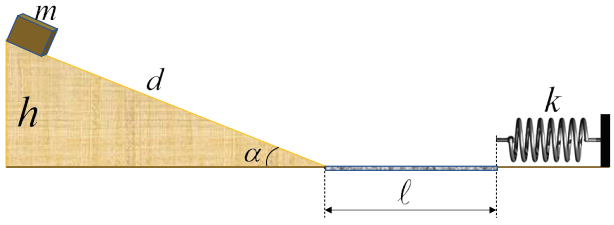
$$E'_{pg} = E'_c \Rightarrow E_f = 2mgh.$$

Aplicăm legea conservării energiei:

$$(E_c + E_p)_i = (E_c + E_p)_f \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = 2mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Din calculele numerice, obținem: $h = 22{,}5$ m

2. Un corp cu masa $m = 2$ kg, aflat inițial în repaus, alunecă fără frecare din vârful unui plan înclinat de unghi $\alpha = 37°$ și lungime $d = 5$ m. La baza planului înclinat, corpul trece lin pe un plan orizontal, unde acționează o forță de frecare caracterizată prin coeficientul $\mu = 0{,}20$. După ce parcurge pe planul orizontal distanța $\ell = 8$ m, corpul lovește un resort cu constanta elastică $k = 400$ N/m, pe care îl comprimă și se oprește. Se neglijează frecarea în timpul comprimării resortului. Se consideră accelerația gravitațională $g = 10$ m/s². Aflați: a) energia mecanică totală a corpului în vârful planului înclinat (energia potențială gravitațională se consideră nulă la baza planului); b) energia cinetică a corpului la baza planului înclinat; c) viteza corpului imediat înainte de a atinge resortul; d) comprimarea maximă a resortului.

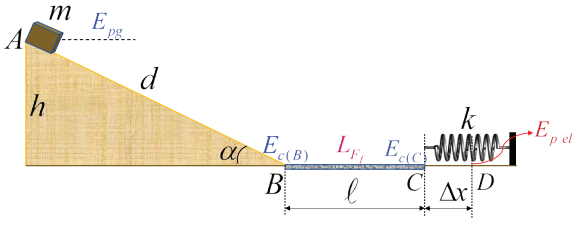


Rezolvare:

a) În vârful planului înclinat, corpul are doar energie potențială gravitațională, prin urmare, energia mecanică este:

$$E_{(A)} = E_{pg} = mg \cdot h = mgd \cdot \sin\alpha \Rightarrow E = 60 \text{ J}.$$

b) Pe planul înclinat nu există frecare $\Rightarrow$ energia mecanică se conservă: $E_{(A)} = E_{c\,(B)} = 60$ J.



c) Pe planul orizontal, mișcarea se face cu frecare ($F_f = \mu N = \mu mg$), prin urmare, se aplică teorema variației energiei cinetice:

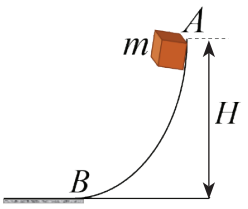
$$E_{c(C)} - E_{c(B)} = L_{F_f} \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - E_{c(B)} = -F_f \cdot \ell \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - E_{(A)} = -\mu mg\ell.$$

$$v_C = \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{(A)} - \mu mg\ell)}{m}} \Rightarrow v_C = \sqrt{28} \cong 5{,}3 \text{ m/s}.$$

d) Pe porțiunea *CD* se aplică legea conservării energiei: în *C*, corpul are energie cinetică care se transformă integral în energie potențială elastică de deformare a resortului, în *D*.

$$E_{c(C)} = E_{p\,el(D)} \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2} \Rightarrow \Delta x = v_C\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \Delta x \cong 0{,}37\ \text{m}.$$

3. Un corp de masă $m = 2$ kg, aflat inițial în repaus la înălțimea $H = 10$ m, este lăsat liber să alunece fără frecare pe o suprafață curbă *AB*, ca în figura alăturată. Începând din punctul *B*, corpul își continuă mișcarea cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}25$. Energia potențială gravitațională se consideră nulă în punctul *B*. Se consideră accelerația gravitațională $g = 10$ m/s².



Determinați:

a) viteza corpului în punctul *B*;

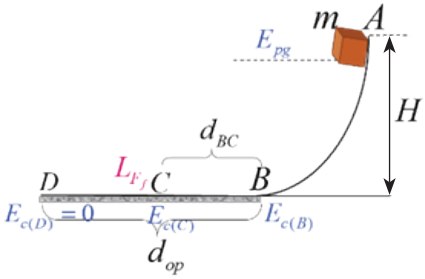
b) distanța parcursă de corp pe suprafața orizontală până când energia mecanică totală a acestuia devine egală cu un sfert din energia mecanică totală inițială;

c) distanța parcursă de corp pe suprafața orizontală până la oprire.

Rezolvare:

a) Pe porțiunea *AB*, mișcarea se face fără frecare, prin urmare, se aplică legea conservării energiei:

$$E_{(A)} = E_{(B)} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH} \Rightarrow v_B = \sqrt{200} \cong 14{,}1\ \text{m/s}.$$



b) Pe planul orizontal, mișcarea se face cu frecare: $F_f = \mu N = \mu mg$, situație în care se aplică teorema variației energiei cinetice.

Ținem cont de faptul că energia cinetică a corpului în *C* este egală cu un sfert din energia mecanică totală inițială, $E_{(A)}$.

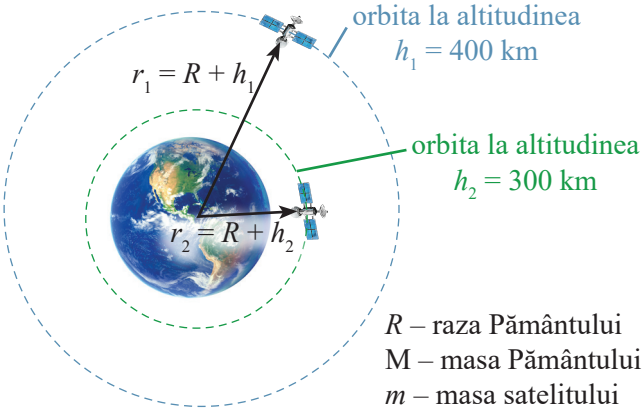
Deoarece $E_{(A)} = mgH \Rightarrow E_{(A)} = 200$ J, prin urmare, $E_{c(B)} = 200$ J.

$$E_{c(C)} - E_{c(B)} = L_{Ff} \Rightarrow \frac{1}{4}E_{(A)} - E_{(A)} = -\mu mgd_{BC} \Rightarrow -\frac{3}{4}E_{(A)} = -\mu mgd_{BC} \Rightarrow d_{BC} = \frac{3E_{(A)}}{4\mu mg} \Rightarrow d_{BC} = 30\ \text{m}.$$

c) Pentru a calcula distanța parcursă de corp pe planul orizontal până la oprire ($E_{c(D)} = 0$), se aplică teorema variației energiei cinetice pentru stările *B* și *D*:

$$E_{c(D)} - E_{c(B)} = L_{Ff} \Rightarrow 0 - E_{(A)} = -\mu mgd_{BD} \Rightarrow -E_{(A)} = -\mu mgd_{BD} \Rightarrow d_{BD} = \frac{E_{(A)}}{\mu mg} \Rightarrow d_{BD} = 40\ \text{m}.$$

4. Un satelit cu masa $m = 500$ kg se deplasează pe o orbită circulară în jurul Pământului la altitudinea $h_1 = 400$ km. Din cauza frecării cu atmosfera rarefiată, satelitul ajunge pe o orbită circulară mai joasă, la altitudinea $h_2 = 300$ km. Se cunosc: raza Pământului, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, masa Pământului, $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, constanta gravitațională, $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Determinați energia mecanică pierdută sub formă de căldură degajată prin frecare.



Rezolvare:

În apropierea Pământului, energia potențială gravitațională este $E_p = mgh$, această relație fiind o aproximație valabilă pentru altitudini relativ mici. Pentru altitudini mari (de exemplu, cele la care se deplasează sateliții), energia potențială gravitațională depinde de distanța față de centrul Pământului și se exprimă prin relația: $E_{pg} = -\frac{KMm}{r}$, unde m este masa corpului, M este masa Pământului, iar r este distanța la care se găsește corpul față de centrul Pământului.

Energia mecanică totală a unui satelit este: $E = E_c + E_{pg}$.

Pentru a afla energia cinetică, trebuie să ținem cont de faptul că, în mișcarea pe traiectoria circulară, forța de atracție gravitațională este o forță de tip centripet:

$$\frac{KMm}{r^2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{KM}{r} \Rightarrow E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{KMm}{2r}$$

Prin urmare, energia mecanică totală este: $E = \frac{KMm}{2r} + \left(-\frac{KMm}{r}\right) = -\frac{KMm}{2r}$.

Calculăm razele orbitelor pe care se deplasează satelitul:

$r_1 = R + h_1$, de unde $r_1 = 6{,}37 \cdot 10^6 + 400.000$ m $= 6{,}77 \cdot 10^6$ m;

$r_2 = R + h_2$, de unde $r_2 = 6{,}37 \cdot 10^6 + 300.000$ m $= 6{,}77 \cdot 10^6$ m.

Energia pierdută se transformă în căldură:

$$Q = E_1 - E_2 = -\frac{KMm}{2r_1} - \left(-\frac{KMm}{2r_2}\right) = \frac{KMm}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Din calculele numerice, rezultă:

$$Q = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{25} \cdot 500}{2} \cdot \left(\frac{1}{6{,}67 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}77 \cdot 10^6}\right) \cong 4{,}4 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

5. Explică modul în care energia cinetică a corpului lansat vertical în sus cu viteza inițială v_0 se transformă în energie potențială gravitațională. Determină poziția în care energia potențială reprezintă un sfert din energia cinetică și discută de ce rezultatul nu depinde de masa corpului.

Rezolvare:

Pe măsură ce corpul urcă, viteza lui scade sub acțiunea greutății, deci energia cinetică scade, iar energia potențială gravitațională crește. În absența frecării, suma lor rămâne constantă. La înălțimea h, energia potențială este un sfert din energia cinetică:

$$E_p = \frac{1}{4}E_c \Rightarrow mgh = \frac{1}{4} \cdot \frac{mv^2}{2} \Rightarrow h = \frac{v^2}{8g}.$$

Deci energia totală este: $E_t = E_{c0} = E_p = E_c = \frac{1}{4}E_c + E_c = \frac{5}{4}E_c$.

Inițial, energia mecanică este doar energie cinetică: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{4}{5}v_0^2$.

Înlocuind în relația lui h, se obține: $h = \frac{v_0^2}{10g}$.

4.7. Impulsul mecanic

4.7.1. Teorema variației impulsului punctului material

Impulsul $(\vec{p})$ este o mărime fizică foarte utilă pentru studiul interacțiunii dintre două sau mai multe corpuri. Orice corp aflat în mișcare are impuls.

Definiție

Impulsul unui punct material este mărimea fizică vectorială egală cu produsul dintre masa (m) și viteza $(\vec{v})$ a punctului material

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (4.7.1)$$

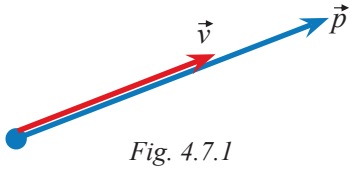


Fig. 4.7.1

Impulsul are direcția și sensul vitezei (vezi fig. 4.7.1).

Atunci când asupra punctului material acționează o forță rezultantă constantă $\vec{F}$, ea produce o variație a impulsului $\Delta\vec{p}$.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Deci: $$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad (4.7.2)$$

Variația impulsului are direcția și sensul forței (vezi fig. 4.7.2).

Mărimea vectorială $\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{H}$ se numește *impulsul forței*.

Relația (4.7.2) exprimă teorema variației impulsului pentru un punct material.

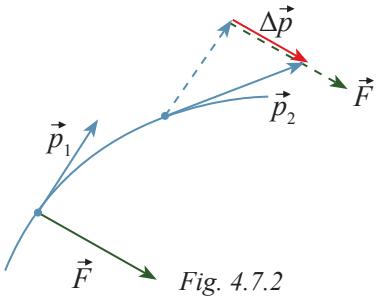


Fig. 4.7.2

Enunț

Variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței rezultante ce acționează asupra acelui punct.

Unitatea de măsură pentru impuls este:

$$[p]_{SI} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{N} \cdot \text{s}.$$

Atunci când se reprezintă grafic forța ce acționează asupra unui corp în funcție de timp, impulsul forței reprezintă aria figurii cuprinse între graficul forței, axa timpului și dreptele $t = t_1$ și $t = t_2$ (vezi figurile 4.7.3. pentru F constant și 4.7.4. pentru F variabil).

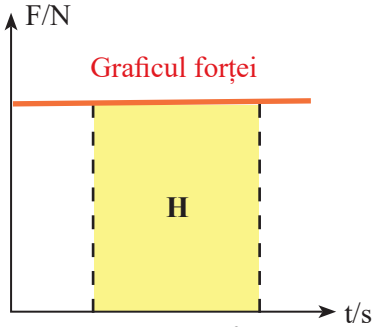


Fig. 4.7.3

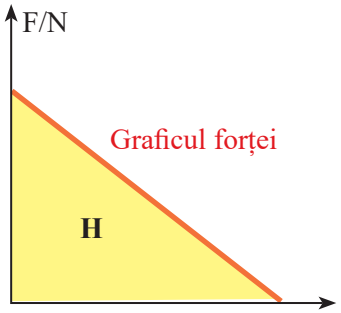


Fig. 4.7.4

Relația (4.7.2) arată că efectul produs de o forță ce acționează asupra unui corp (variația vitezei Δv sau variația impulsului Δp corpului) depinde de mărimea forței și de timpul în care ea acționează asupra corpului. Deci cu cât aria de sub graficul forței între t_1 și t_2 este mai mare, cu atât efectul forței este mai puternic.

Un punct material este izolat atunci când rezultanta forțelor care acționează asupra lui este nulă, $\vec{F} = \vec{0}$. Din relația (4.7.2), se obține:

$$\Delta\vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{inițial} = \vec{p}_{final} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (4.7.3)$$

Relația (4.7.3) exprimă legea conservării impulsului punctului material.

Enunț
Impulsul unui punct material izolat este constant.

Din relațiile (4.7.1) și (4.7.3), se obține: $\vec{v}_{inițial} = \vec{v}_{final} = \overrightarrow{constant}$, deci viteza unui punct material izolat este constantă.

4.7.2. Teorema variației impulsului unui sistem de puncte materiale

Punctele materiale ce formează un sistem interacționează între ele (vezi fig. 4.7.5) determinând apariția unor *forțele interne* ale sistemului $(\vec{F}_{A\to B}$ și $\vec{F}_{B\to A})$.

Conform principiului acțiunii și reacțiunii:

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} \qquad (4.7.4)$$

Fiecare particulă ce formează sistemul poate interacționa, în general, cu mediul exterior, determinând astfel apariția unor *forțe externe* $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$.

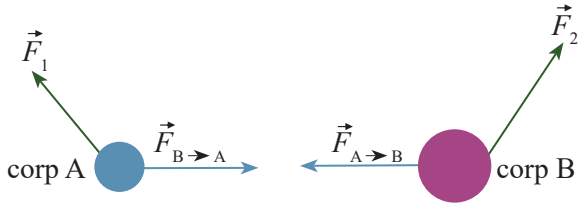


Fig. 4.7.5

Pentru un sistem format din două corpuri, se aplică teorema variației impulsului pentru fiecare corp.

$$(\Delta\vec{p})_A = (\vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_1)\cdot\Delta t \text{ și } (\Delta\vec{p})_B = (\vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_2)\cdot\Delta t \qquad (4.7.5)$$

Adunând relațiile (4.7.5) și având în vedere relația (4.7.4), se obține:

$$(\Delta\vec{p})_A + (\Delta\vec{p})_B = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\cdot\Delta t \Rightarrow \Delta(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\cdot\Delta t.$$

Deci:
$$\Delta\vec{P} = (\vec{F}_{\text{exterior}})\cdot\Delta t \qquad (4.7.6)$$

În relația (4.7.6) am notat:

- $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ → impulsul unui sistem de puncte materiale este egal cu suma vectorială a impulsurilor punctelor materiale;
- $\vec{F}_{\text{exterior}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ → rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului.

Observație: *Forțele interne ale sistemului nu pot modifica impulsul sistemului.*

Teorema variației impulsului pentru un sistem de puncte materiale, enunț
Variația impulsului unui sistem de puncte materiale $(\Delta\vec{P})$ *este egală cu impulsul forței rezultante exterioare ce acționează asupra sistemului* $((\vec{F}_{\text{exterior}})\cdot\Delta t)$.

4.7.3. Legea conservării impulsului unui sistem de puncte materiale

Dacă rezultanta forțelor externe ale unui sistem este nulă, *sistemul este izolat* $(\vec{F}_{\text{exterior}} = \vec{0})$.

Pentru un sistem izolat:

$$\Delta\vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_{initial} = \vec{P}_{final} \Rightarrow \vec{P} = \text{constant} \qquad (4.7.7)$$

Legea conservării impulsului unui sistem de puncte materiale, enunț
Impulsul unui sistem izolat este constant (*relația* 4.7.7).

Ciocniri unidimensionale

Prin ciocnirea a două corpuri se înțelege un proces de interacțiune ce durează un timp foarte scurt, dar finit.

În momentul atingerii, corpurile încep să se deformeze. În această primă etapă, de *comprimare, viteza relativă a unui corp față de celălalt scade la zero*, energia cinetică relativă se transformă în alte forme de energie (de exemplu, energie de deformare).

În a doua etapă, de *separare a corpurilor, deformările se reduc și viteza relativă a unui corp față de altul crește.*

Ciocnirea unidimensională plastică se finalizează la sfârșitul primei etape a ciocnirii, astfel că, după ciocnire, corpurile rămân unite formând un singur corp (fig.4.7.6. a și 4.7.6. b).

Reține

În ciocnirea plastică se conservă impulsul și se pierde energie. Energia pierdută se transformă, în general, în căldură (Q).

Legea conservării impulsului:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v} \quad (4.7.8)$$

Expresia (4.7.8) poate fi scrisă în funcție de modulul vitezelor dacă se ține cont de sensul pozitiv de mișcare ales (vezi sistemul de axe).

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (4.7.9)$$

Pierderea de energie este:

$$Q = -\Delta E_c = E_{c\,inițial} - E_{c\,final} \Rightarrow Q = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2}$$

$$Q = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (4.7.10)$$

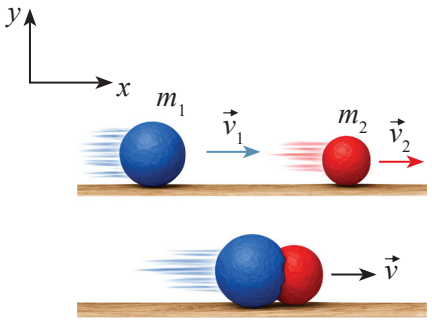


Fig. 4.7.6. a

Reține

$\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \mu_r$ este masa redusă a sistemului și $v_1 - v_2 = v_r$ este viteza relativă înainte de ciocnire.

$$Q = \frac{\mu_r \cdot v_r^2}{2} \quad (4.7.11)$$

Observație: În cazul ciocnirii plastice a corpurilor care vin unul spre altul (fig. 4.7.6 b), se schimbă numai relațiile (4.7.9) și (4.7.10), ținând cont de sensul pozitiv ales:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (4.7.9')$$

$$Q = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 + v_2)^2}{2} = \frac{\mu \cdot v_r^2}{2} \quad (4.7.10')$$

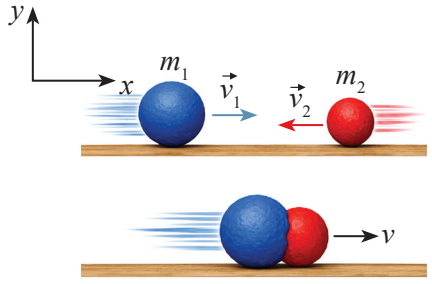


Fig. 4.7.6. b

*În **ciocnirea unidimensională perfect elastică** se conservă impulsul și energia cinetică a sistemului.*

În ciocnirea perfect elastică, centrală și frontală, corpurile, atât înainte, cât și după ciocnire, se vor mișca de-a lungul unei drepte paralelă cu o dreaptă ce trece prin centrele de simetrie ale celor două corpuri, perpendiculară pe panul de contact.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 \quad (4.7.12)$$

Unde $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ sunt vitezele înainte de ciocnire, iar $\vec{u}_1$ și $\vec{u}_2$ sunt vitezele după de ciocnire. Având în vedere sensul pozitiv al axei Ox și sensul vitezelor (fig. 4.7.7):

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \quad (4.7.13)$$

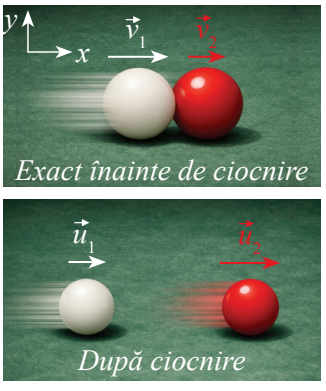


Fig. 4.7.7

Conservarea energiei se exprimă prin relația:

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot u_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot u_2^2}{2} \qquad (4.7.14)$$

Prelucrând relațiile (4.7.13) și (4.7.14), se obține:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \quad (4.7.15)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \quad (4.7.16)$$

Din raportul relațiilor (4.7.16) și (4.7.15), se obține:

$$u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2) \quad (4.7.17)$$

Relația (4.7.17) arată că *viteza relativă dintre corpuri după ciocnire* ($u_r = u_1 - u_2$) *este egală și de sens contrar cu viteza relativă dintre corpuri înainte de ciocnire* ($v_r = v_1 - v_2$), $v_r = -u_r$.

Din relația (4.7.17), se obține:

$$u_2 = v_1 - v_2 + u_1 \qquad (4.7.18)$$

Folosim relația (4.7.18) pentru a înlocui u_2 în (4.7.13):

$$m_1 \cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_2 = u_1 \cdot (m_1 + m_2) \qquad (4.7.19)$$

Pentru a obține o relație mai ușor de reținut în (4.7.19), adunăm și scădem în membrul drept ($m_1 v_1$):

$$2(m_1 v_1 + m_2 v_2) - v_1 \cdot (m_1 + m_2) = u_1 \cdot (m_1 + m_2) \Rightarrow u_1 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 \qquad (4.7.20)$$

Folosind relațiile (4.7.18) și (4.7.20), se obține:

$$u_2 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2 \qquad (4.7.21)$$

PENTRU CURIOȘI:

În ciocnirile reale, în faza separării, se pierde o parte din energia cinetică deoarece corpurile rămân puțin deformate după ciocnire. Caracterul mai elastic sau mai puțin elastic al unei ciocniri este caracterizat de mărimea fizică numită *coeficient de restituire* (notată *k*) și definit în funcție de vitezele relative după ciocnire, respectiv înainte de ciocnire.

$$k = -\frac{u_r}{v_r} = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}$$

La ciocnirea plastică $u_1 = u_2 = v$ și $k = 0$, iar la ciocnirea perfect elastică unidirecțională $u_r = -v_r$ și $k = 1$. În general, $0 \le k \le 1$.

EXPERIMENTEAZĂ: Ciocnirea dintre două corpuri de mase egale

Scopul lucrării: verificarea legii conservării impulsului și energiei în ciocnirea perfect elastică unidimensională.

Materiale necesare: riglă, stative, dispozitive de prindere, două bile cu mase egale, fire de lungimi egale.

Teoria lucrării: Prin aplicarea legilor de conservare a impulsului și energiei într-o ciocnire perfect elastică, obținem relațiile (4.7.20) și (4.7.21). Dacă în aceste relații se consideră masele celor două corpuri egale ($m_1 = m_2 = m$), se obține:

$$u_1 = v_2 \text{ și } u_2 = v_1 \qquad (4.7.22)$$

Relația (4.7.22) arată că după ciocnirea perfect elastică dintre două corpuri cu mase egale corpurile își schimbă vitezele între ele.

În experimentul prezentat în fig. 4.7.8 a), b) și c), bilele au mase egale și în momentul ciocnirii bila roșie are o viteză, iar bila albastră este în repaus. Conform relației (4.7.22), după

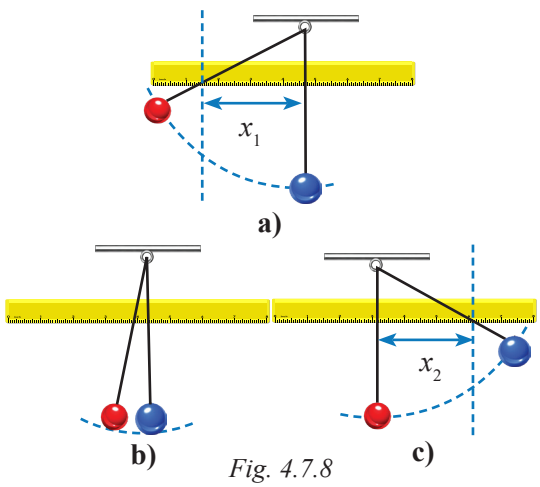


Fig. 4.7.8

ciocnire, bila roșie rămâne în repaus, iar bila albastră va căpăta viteza bilei roșii înainte de ciocnire. Astfel, în condiții ideale, bila albastră se va ridica la o înălțime egală cu înălțimea de la care a plecat bila roșie. În aceste condiții, unghiurile formate de fire cu verticala sunt egale și $x_1 = x_2$.

Modul de lucru:

– se realizează montajul din fig. 4.7.8 atașând bilele de mase egale la extremitatea inferioară a firelor;

– se așază rigla în spatele firelor legate de bile;

– una din bile (bila roșie) este scoasă din poziția de echilibru, iar cealaltă (bila albastră) rămâne în repaus;

– pe riglă se măsoară distanța de la firul vertical la punctul în care firul oblic intersectează scara gradată a riglei (partea de jos a riglei) (x_1);

– se lasă bila roșie liberă, și ea ciocnește elastic bila albastră;

– după ciocnire, firul legat de bila albastră deviază față de verticală cu x_2 pe riglă, în momentul opririi bilei albastre;

– experimental, se măsoară x_1 și x_2.

Date experimentale. Interpretarea rezultatelor

1. Completează următorul tabel de date experimentale:

Nr. det	x_1/cm	x_2/cm	x_1/x_2	$(x_2/x_1)_{mediu}$	$\Delta(x_2/x_1)$	$(\Delta(x_2/x_1))_{mediu}$

2. Prezintă rezultatul sub forma:

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{mediu} \pm \left(\Delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)_{mediu}$$

3. Formulează o concluzie referitoare la obiectivul propus.

4. Indică cel puțin trei surse de erori.

Concluzia experimentului: dacă valoarea 1 este cuprinsă între valorile finale pentru (x_2/x_1), se poate considera că experimentul desfășurat verifică teoria pentru ciocnirile elastice.

Surse de erori:

– este posibil ca măsurarea pentru x_2 să nu se realizeze exact în momentul opririi bilei albastre;

– eroare de citire a pozițiilor extreme ale segmentelor x_1 și x_2;

– este posibil să existe o diferență mică între masele bilelor.

APLICĂ

1. O mașină cu masa de 400 kg se deplasează spre est cu viteza de 72 km/h. Ce impuls are mașina?

Rezolvare:

• Exprimă viteza în m/s (unități ale SI)

• Răspunsul trebuie să conțină valoarea numerică și orientarea impulsului mașinii

$$v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}, \; m = 400 \text{ kg}$$

$$p = m \cdot v = 8000 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Răspuns: Mașina are impulsul de 8000 Kg · m · s^{-1}.

2. Asupra unui corp de masă m = 200 kg acționează o forță F, pe direcția de deplasare a corpului, care îi produce o creștere a vitezei cu Δv = 6 m · s^{-1} în Δt = 1 s. Calculează mărimea forței F dacă deplasarea se face fără frecare:

a) pe orizontală;

b) pe o pantă de unghi α (sin α = 0,1), în sensul urcării (g = 10 m/s^2) (fig. 4.7.9).

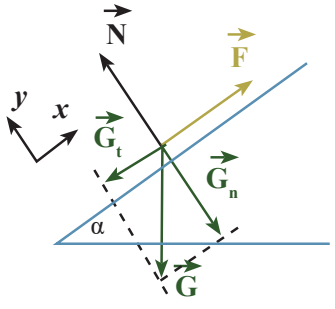


Fig. 4.7.9

Rezolvare:

Exprimă teorema de variație a impulsului pentru un punct material:

a) $$m \cdot \Delta v = F \cdot \Delta t \qquad F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = 1200\ \text{N}$$

b) $$m \cdot \Delta \vec{v} = (\vec{F} + \vec{G} + \vec{N})\Delta t \quad (4.7.23)$$

Proiectează relația vectorială (4.7.23) după axa *Ox*:

$$m \cdot \Delta v = (F - mg\sin\alpha)\Delta t \qquad F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} + mg\sin\alpha = 1400\ \text{N}$$

3. Asupra unui corp cu masa de 20 g acționează o forță a cărui mărime variază în timp conform graficului din fig. 4.7.10. Forța are permanent direcția și sensul mișcării corpului. Cu cât variază mărimea vitezei corpului pe durata acțiunii forței $t \in [0{,}1\ \text{s};\ 0{,}5\ \text{s}]$?

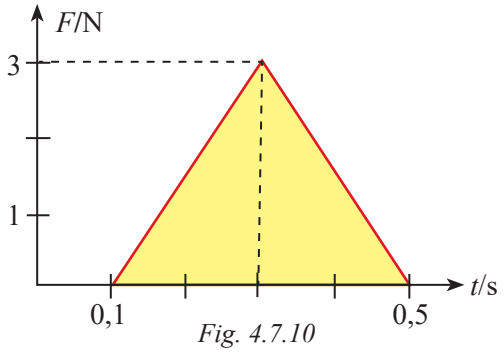


Fig. 4.7.10

Rezolvare:

$m = 20\ \text{g} = 0{,}02\ \text{kg},\ t \in [0{,}1\ \text{s};\ 0{,}5\ \text{s}]$

Studiază graficul din fig. 4.7.10. Impulsul forței, *H*, are mărimea egală cu aria triunghiului din figură.

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{H}$$

$$m\vec{v}_{\text{final}} - m\vec{v}_{\text{final}} - m\vec{v}_{\text{initial}} = \vec{H} \Rightarrow m \cdot v_{\text{final}} - m \cdot v_{\text{initial}} = H$$

Orientarea impulsului va fi după direcția mișcării și în sensul ei, sens considerat pozitiv. Din acest motiv, relația vectorială și cea referitoare la modulele mărimilor fizice au aceeași formă.

$$m \cdot (v_{\text{final}} - v_{\text{initial}}) = H \Rightarrow \Delta v = (v_{\text{final}} - v_{\text{initial}}) = \frac{H}{m}$$

$$\Delta v = \frac{0{,}6}{0{,}02}\ \text{m/s} = 30\ \text{m/s}$$

4. Un cărucior cu masa de 150 kg se află pe o suprafață orizontală și se deplasează spre un perete vertical cu viteza $v_1 = 15$ m/s. El lovește peretele și imediat după lovire viteza lui devine $v_2 = 5$ m/s, având aceeași direcție și sens contrar vitezei inițiale. Știind că durata interacțiunii cu peretele este de 0,3 s, calculează forța medie cu care bila acționează asupra peretelui și cu care peretele acționează asupra bilei (fig. 4.7.11).

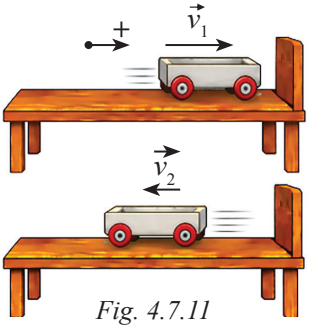


Fig. 4.7.11

Rezolvare: $m = 150$ kg; $v_1 = 15$ m/s; $v_2 = 5$ m/s; $\Delta t = 0{,}3$ s.

Relația vectorială pentru legea variației impulsului căruciorului este:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow m \cdot (-\vec{v}_2) - m \cdot \vec{v}_1 = \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow -m \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_1) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Relația între modulele mărimilor care apar este:

$$-m \cdot (v_2 + v_1) = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = -\frac{m \cdot (v_2 + v_1)}{\Delta t} = -10000\ \text{N}$$

$$\vec{F}' = -\vec{F} \Rightarrow F' = -F = 10000\ \text{N}$$

$\text{kg} \cdot \text{m/s}$

- $F < 0$ arată că forța F cu care peretele acționează peretele asupra căruciorului este spre stânga.
- $F' > 0$ arată că forța că forța F' cu care căruciorul acționează asupra peretelui este spre dreapta (sensul pozitiv ales).

5. Recul unei arme reprezintă mișcarea acesteia în sens opus sensului de deplasare a proiectilului, imediat după tragere (fig. 4.7.12). Folosind o pușcă cu masa $M = 3$ kg, o persoană trage un glonț de masă $m = 10$ g, care părăsește țeava cu viteza $v_1 = 600$ m/s.



Fig. 4.7.12

a) Determină viteza de recul, v_2, a puștii imediat după tragere.

b) Determină energia cinetică a puștii în mișcarea de recul.

c) Compară energia cinetică a glonțului cu cea a puștii și explica diferența.

Rezolvare:

a) Înainte de tragere, pușca și glonțul sunt în repaus. După tragere, glonțul este proiectat cu viteza $\vec{v}_1$, iar pușca se deplasează în sens opus cu viteza $\vec{v}_2$, numită viteză de recul.

Aplică legea conservării impulsului pentru sistemul pușcă-glonț:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \vec{0} = m \cdot \vec{v}_1 + M \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow 0 = m \cdot v_1 - M \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{mv_1}{M} = 2\,\text{m/s}$$

b) $E_{c2} = \dfrac{M \cdot v_2^2}{2} \Rightarrow E_{c2} = \dfrac{m^2 \cdot v_1^2}{2M} = 6\,\text{J}$

c) $\dfrac{E_{c1}}{E_{c2}} = \dfrac{mv_1^2}{2} \cdot \dfrac{2M}{m^2 v_1^2} \Rightarrow \dfrac{E_{c1}}{E_{c2}} = \dfrac{M}{m} = 300 \Rightarrow E_{c1} \gg E_{c2}$.

Explozia produsă de praful de pușcă produce o energie care se distribuie pe glonț și pe armă. Glonțul are o energie mai mare pentru că raportul M/m este mult mai mare decât 1.

6. Pe apa liniștită a unui lac se află un pescar cu masa $m_1 = 90$ kg, într-o barcă cu masa $m_2 = 60$ kg. Inițial, pescarul și barca sunt în repaus. La un moment dat, pescarul pornește spre partea din față a bărcii deplasându-se pe distanța $\ell = 3$ m (fig. 4.7.13). Calculează deplasarea bărcii față de apă în timpul deplasării pescarului pe distanța ℓ.

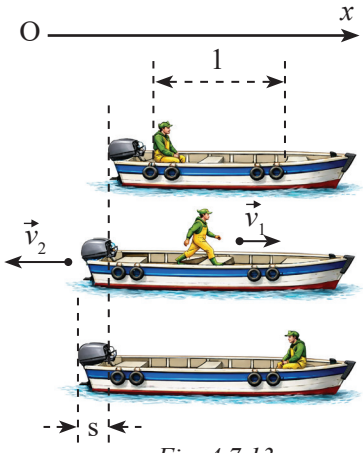


Fig. 4.7.13

Rezolvare:

Aplică conservarea impulsului pentru sistemul pescar-barcă. Inițial, sistemul este în repaus.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \vec{0} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow 0 = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \quad (4.7.24)$$

În relația (4.7.24), v_1 și v_2 reprezintă vitezele față de pământ.

Deplasarea pescarului față de barcă se face cu viteza relativă v_{12}.

$$v_{12} = v_1 + v_2 = v_1 + \frac{m_1 v_1}{m_2} = v_1 \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

În timpul deplasării pescarului pe distanța ℓ cu viteza v_{12} barca se deplasează pe distanța s cu viteza v_2.

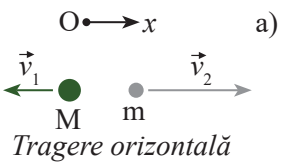
$$\ell = v_{12} \cdot t \text{ și } s = v_2 \cdot t$$

$$\frac{s}{\ell} = \frac{v_2}{v_{12}} = \frac{v_2}{v_1 \cdot \left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)} = \frac{m_1 v_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{v_1 \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}$$

$$s = \frac{\ell \cdot m_1}{m_1 + m_2} = 1{,}8\,\text{m}$$

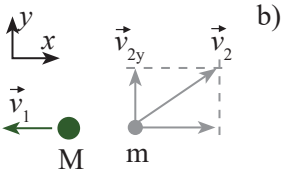
7. Un vânător stă pe o platformă orizontală. Mai întâi, vânătorul trage în direcție orizontală un glonț și apoi trage un glonț identic, cu aceeași viteză, dar cu arma înclinată la 30° față de orizontală (fig. 4.7.14). Știind că în ambele cazuri forța de frânare asupra platformei este aceeași, calculează raportul distanțelor parcurse de platformă până la oprire (se neglijează modificarea forței de frânare în momentul tragerii oblice).





Tragere orizontală





Tragere oblică

Fig. 4.7.14

Rezolvare:

Aplică legea conservării impulsului în momentul tragerii. Inițial, în ambele cazuri, sistemul format din vânător, platformă, pușcă și glonț sunt în repaus.

$$\vec{P}_i = \vec{0}$$

După tragere orizontală, ținând cont de sensul pozitiv al axei *Ox* (fig. 4.7.24.a):

$$mv_2 - Mv_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{mv_2}{M} \quad (4.7.25)$$

După tragere oblică, se descompune $\vec{v}_2$ după cele două axe. Se aplică legea conservării impulsului după *Ox* ținând cont de sensul pozitiv ales:

$$mv'_{2x} - Mv'_1 = 0 \Rightarrow mv_2 \cos 30° - Mv'_1 = 0 \Rightarrow v'_1 = \frac{mv_2 \cos 30°}{M} \quad (4.7.26)$$

După tragere, masa sistemului vânător + platformă + pușcă nu se modifică și, dacă forța de frânare rămâne constantă și accelerația de frânare este aceeași după cele două trageri, distanțele de frânare vor fi:

$$d_1 = \frac{v_1^2}{2a},\ d'_1 = \frac{(v'_1)^2}{2a} \quad (4.7.27)$$

Din relațiile (4.7.25), (4.7.26) și (4.7.27), se obține:

$$\frac{d_1}{d'_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos 30°}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

EXERSEAZĂ

1. Se studiază două situații: 1) ciocnirea frontală, perfect elastică, a unui corp cu un perete. În acest caz, viteza lui își păstrează modulul și direcția, dar își schimbă sensul după ciocnire. 2) Ciocnirea plastică a aceluiași corp cu peretele. În acest caz, corpul rămâne lipit de perete. Calculează raportul F_1/F_2 dintre forța medie de contact dintre corp și perete în cele două cazuri dacă timpul de ciocnire rămâne același.

2. O bilă de lemn cu masa $M = 1{,}00$ kg stă pe un suport inelar. Un glonț de masă $m = 10{,}0$ g vine de jos în sus, lovește cu viteza $v_0 = 300$ m/s bila și rămâne înfipt în ea. Calculează:

a) viteza sistemului bilă-glonț imediat după ciocnire;

b) căldura care se degajă în acest proces.

3. Un proiectil de masă $M = 100$ kg se deplasează rectiliniu cu viteza $v = 300$ m/s. În timpul zborului, acesta explodează în două fragmente. Unul dintre fragmente, având masa $m_1 = 30$ kg, continuă să se deplaseze în aceeași direcție și sens cu viteza $v_1 = 500$ m/s. Calculează:

a) viteza celui de-al doilea fragment;

b) variația energiei cinetice produse în urma exploziei.

EXERSEAZĂ

I. Copiază în caiet următoarele afirmații și răspunde cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A/F. Pentru un sistem izolat asupra căruia acționează numai forțe conservative, energia mecanică a sistemului se conservă.

2. A/F. Într-un sistem izolat în care acționează doar forța gravitațională, energia cinetică și energia potențială gravitațională se pot transforma una în cealaltă.

3. A/F. Dacă asupra unui sistem acționează forțe de frecare, energia mecanică a sistemului se conservă.

4. A/F. Un corp aruncat vertical în sus revine la sol cu aceeași viteză cu care a fost aruncat, dacă se neglijează frecarea cu aerul.

5. A/F. Energia potențială gravitațională este determinată în mod unic, indiferent de alegerea nivelului de referință.

6. A/F. Un corp aflat într-un câmp gravitațional posedă energie potențială gravitațională atunci când se află la o anumită înălțime față de un nivel de referință ales.

7. A/F. Dacă forța de greutate efectuează un lucru mecanic pozitiv asupra unui corp, energia potențială gravitațională a acestuia crește.

8. A/F. În toate punctele situate pe același plan orizontal, energia potențială gravitațională are aceeași valoare, față de un nivel de referință ales.

9. A/F. Un resort alungit sau comprimat posedă energie potențială elastică.

10. A/F. Pentru definirea energiei potențiale elastice a unui resort este necesară alegerea unei poziții de referință.

11. A/F. Forța de greutate este o forță conservativă, deoarece lucrul mecanic efectuat de aceasta între două puncte nu depinde de drumul parcurs.

12. A/F. Lucrul mecanic al forței de greutate pe un contur închis este diferit de zero.

13. A/F. Dacă asupra unui corp acționează mai multe forțe conservative, lucrul mecanic total al acestora este egal cu suma lucrurilor mecanice ale fiecărei forțe.

14. A/F. Forțele conservative sunt forțe al căror lucru mecanic depinde numai de pozițiile inițială și finală ale corpului.

15. A/F. Forțele de frecare sunt forțe conservative.

16. A/F. Lucrul mecanic al forțelor de frecare depinde de drumul parcurs de corp.

17. A/F. Forțele elastice sunt forțe conservative, deoarece lucrul mecanic al acestora depinde doar de starea inițială și finală a resortului.

18. A/F. La alungirea unui resort, forța elastică este o forță rezistivă.

19. A/F. La comprimarea unui resort, forța elastică este o forță motoare.

20. A/F. Puterea mecanică este o mărime fizică scalară.

21. A/F. Puterea mecanică reprezintă raportul dintre lucrul mecanic efectuat de o forță și intervalul de timp în care acest lucru mecanic este realizat.

II. Rezolvați următoarele probleme. Se va considera $g = 10\ m/s^2$.

Nivel elementar

1. Un corp are la un anumit moment viteza $v_0 = 20\ m/s$ și în același moment energia cinetică a corpului este $E_c = 800\ J$. Să se afle masa corpului.

2. Dacă un corp cu masa $m = 100\ g$ cade liber de la înălțimea $h = 20\ m$. Să se afle energia potențială gravitațională la o pătrime din distanță față de sol, dacă la sol $E_p = 0$.

3. Dintr-un punct, se aruncă pe verticală în sus un corp cu masa $m = 200\ g$ cu o viteză inițială $v_0 = 20\ m/s$. Să se afle la jumătatea înălțimii maxime valoarea energiei potențiale gravitaționale a corpului, dacă în punctul de aruncare $E_p = 0$.

4. Un resort este comprimat cu $x = 5$ cm fiind menținut în această stare de o forță $F = 20$ N. Să se afle energia potențială a sistemului corp-resort.

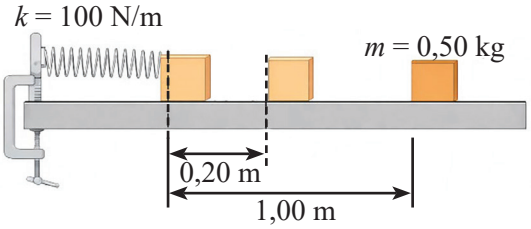
5. O minge de baseball cu masa de 0,145 kg părăsește mâna aruncătorului cu viteza de 32,0 m/s. Dacă rezistența aerului este neglijabilă, ce lucru mecanic a efectuat aruncătorul asupra mingii prin aruncare?

6. La proiectarea unei piese de mașină, se folosește un resort cu lungimea de 8,50 cm atunci când asupra lui nu acționează nicio forță și care poate înmagazina o energie de 15,0 J atunci când este comprimat cu 1,20 cm față de poziția de echilibru. Aflați constanta elastică a resortului.

7. O cărămidă cu masa de 1,50 kg alunecă pe o suprafață orizontală rugoasă cu viteza de 13,0 m/s. Dacă aceasta se oprește în 4,80 s, câtă energie mecanică se pierde și ce se întâmplă cu această energie?

Nivel mediu

8. Un bloc cu masa de 0,50 kg acționează asupra unui resort orizontal de masă neglijabilă, comprimându-l cu 0,20 m, așa cum se arată în figura alăturată. După eliberare, blocul se deplasează pe o masă orizontală pe o distanță de 1,00 m, după care se oprește. Constanta elastică a resortului este $k = 100$ N/m. Să se determine coeficientul de frecare cinetică, μ, dintre bloc și masă.

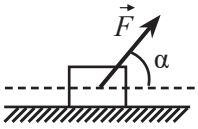


9. Fără parașută, o persoană ajunge la o viteză terminală de aproximativ 62 m/s. Se consideră o cădere de la 1000 m. a) Cu ce viteză ar ajunge persoana la sol dacă nu ar exista forța de rezistență din partea aerului? b) Dacă o persoană cu masa de 70 kg ajunge la sol cu viteza de 62 m/s, câtă energie mecanică s-a pierdut și unde a ajuns aceasta?

10. O bilă metalică de 0,12 kg este legată de un fir foarte ușor de 0,80 m și este eliberată din repaus când firul face un unghi de 45° cu verticala. Se neglijează frecările. Să se determine:

a) viteza bilei în poziția verticală; b) tensiunea din fir în poziția verticală.

11. O pompă ridică 750 L de apă pe minut dintr-o fântână de 14,0 m adâncime și o evacuează cu o viteză de 18,0 m/s. Cât lucru mecanic pe minut efectuează pompa?

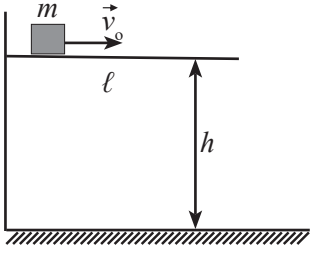


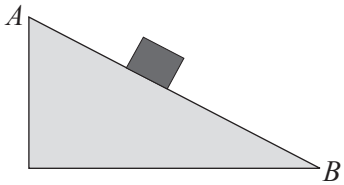
12. Pe un plan orizontal se află inițial în repaus un corp cu masa $m = 2$ kg supus acțiunii unei forțe $F = 15$ N, care acționează ca în figura alăturată sub un unghi $\alpha = 30°$. Mișcarea se face cu frecare coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}2$. Să se afle, după parcurgerea distanței $d = 2$ m: a) viteza corpului; b) energia cinetică a corpului în condițiile punctului a); c) puterea medie dezvoltată de forță în timpul mișcării.

Nivel avansat

13. Un corp cu masa $m = 0{,}20$ kg este lăsat să cadă liber de la o înălțime $h = 0{,}50$ m, măsurată față de capătul superior al unui resort vertical ideal, cu constanta elastică $k = 200$ N/m, fixat pe o masă orizontală. Se neglijează frecările. Să se determine: a) viteza cu care corpul ajunge la capătul superior al resortului; b) comprimarea maximă a resortului; c) lucrul mecanic efectuat de forța elastică a resortului asupra corpului.

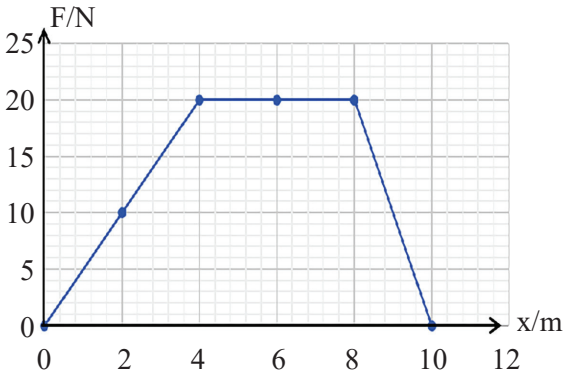
14. Un corp cu masa $m = 2$ kg este așezat la distanța $\ell = 2{,}0$ m de capătul liber al unei platforme orizontale fixe, situată la înălțimea $h = 0{,}80$ m față de sol. Corpul primește o viteză inițială orizontală $v_0 = 5$ m/s, orientată spre capătul liber al platformei, ca în figura alăturată. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și platformă este $\mu = 0{,}25$. Se consideră energia potențială gravitațională nulă la nivelul solului. Determinați: a) viteza corpului în momentul în care ajunge la capătul liber al platformei; b) viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul.



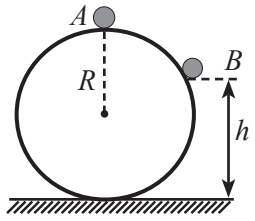


15. Un corp cu masa $m = 0{,}40$ kg, aflat inițial în repaus în punctul A, alunecă liber de-a lungul suprafeței planului înclinat care face un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala, ca în figura alăturată. Înălțimea planului înclinat este $h = 1{,}0$ m, iar coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}20$. Se consideră că energia potențială gravitațională este nulă în punctul B (baza planului). Determinați: a) energia mecanică totală a corpului în punctul A; b) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la deplasarea corpului pe planul înclinat AB; c) viteza corpului în punctul B.

16. Un punct material cu masa $m = 2$ kg se deplasează într-un plan orizontal fără frecare de-a lungul axei Ox, orientată pe direcția și în sensul vitezei într-un plan orizontal fără frecări. Punctul material trece prin originea axei cu viteza inițială $v_0 = 3$ m/s. Asupra punctului material acționează o forță orizontală F, orientată pe direcția axei Ox, a cărei variație în funcție de coordonata x este reprezentată în graficul alăturat. Determinați: a) accelerația punctului material pe intervalul [4 m; 8 m]; b) lucrul mecanic efectuat de forța F pe intervalul [0 m; 10 m]; c) viteza punctului material în punctul de coordonată $x = 4$ m.

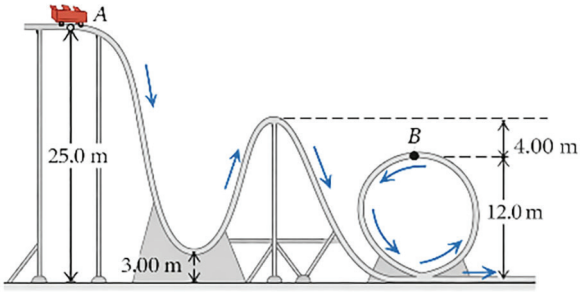


17. Pendul. O bilă metalică mică, cu masa de 0,12 kg, este legată de un fir foarte ușor (practic, fără masă), cu lungimea de 0,80 m, formând un pendul. Pendulul este pus în mișcare prin eliberarea bilei din repaus, atunci când firul face un unghi de 45° cu verticala. Rezistența aerului și alte forme de frecare sunt neglijabile. Care este viteza bilei în momentul în care firul trece prin poziția verticală și care este tensiunea din fir în acel moment?



18. Un corp de mici dimensiuni, cu masa $m = 50$ g, este lăsat să alunece liber, fără viteză inițială, din punctul cel mai înalt A al unei sfere fixe cu raza $R = 0{,}60$ m, ca în figura alăturată. În punctul B, situat la înălțimea $h = 0{,}90$ m față de sol, corpul se desprinde de sferă și își continuă mișcarea numai sub acțiunea greutății, până la atingerea solului. Se neglijează frecările, iar energia potențială gravitațională se consideră nulă la nivelul solului. Determinați: a) lucrul mecanic efectuat de forța de greutate la deplasarea corpului din punctul A în punctul B; b) energia cinetică a corpului în momentul desprinderii de sferă (în punctul B); c) viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul.

19. Un vagon de roller-coaster cu masa de 350 kg pornește din repaus din punctul A și alunecă pe o pistă fără frecare, care include un loop vertical, ca în figura alăturată. a) Cu ce viteză se deplasează vagonul în punctul B? b) Cu ce forță apasă vagonul pe șină în punctul B?



20. O minge este aruncată în sus cu viteza inițială de 15 m/s, sub un unghi de 60° față de orizontală. Folosind considerente energetice, determinați înălțimea maximă la care ajunge mingea față de sol.

21. Analiza unui accident rutier. Într-un accident rutier, un autoturism a lovit un pieton, după care șoferul a frânat brusc pentru a opri mașina. În timpul procesului, avocatul șoferului a susținut că acesta respecta limita legală de viteză, $v_{lim} = 50$ km/h. Ești chemat ca expert al statului. În urma cercetării locului accidentului, s-au făcut următoarele măsurători: urmele de frânare au o lungime $\ell = 85$ m; coeficientul de frecare la alunecare

dintre anvelope și șosea este $\mu = 0{,}30$. Să se determine: a) dacă șoferul respecta limita legală de viteză (răspunsul va fi susținut prin calcule); b) valoarea amenzii, știind că aceasta este de 30 lei pentru fiecare km/h peste limita legală, în cazul în care se constată depășirea vitezei.

22. Se studiază două situații : 1) ciocnirea frontală, perfect elastică, a unui corp cu un perete. În acest caz viteza lui își păstrează modulul și direcția dar își schimbă sensul după ciocnire. 2) Ciocnirea plastică a aceluiași corp cu peretele. În acest caz corpul rămâne lipit de perete. Calculează raportul F_1/F_2 dintre forța medie de contact dintre corp și perete în cele două cazuri dacă timpul de ciocnire rămâne același.

23. O bilă de lemn cu masa $M = 1{,}00$ kg stă pe un suport inelar. Un glonț de masă $m = 10{,}0$ g vine de jos în sus, lovește cu viteza $v_0 = 300$ m/s bila și rămâne înfipt în ea. Calculează:

a) viteza sistemului bilă-glonț imediat după ciocnire;

b) căldura care se degajă în acest proces.

24. Un proiectil de masă $M = 100$ kg se deplasează rectiliniu cu viteza $v = 300$ m/s. În timpul zborului, acesta explodează în două fragmente. Unul dintre fragmente, având masa $m_1 = 30$ kg, continuă să se deplaseze în aceeași direcție si sens, cu viteza $v_1 = 500$ m/s. Calculează:

a) viteza celui de-al doilea fragment;

b) variația energiei cinetice produse în urma exploziei.

25. Un corp cu masa $M = 8$ kg, care se mișcă pe o suprafață orizontală, explodează la un moment dat scindându-se în două fragmente (figura alăturată). Primul fragment are masa $m_1 = 6$ kg și se deplasează pe direcția și în sensul de mișcare al corpului, iar al doilea fragment se deplasează pe aceeași direcție, dar în sens contrar. Modulele vitezelor celor două fragmente sunt egale, $v_1 = 500$ m/s. Calculează viteza pe care a avut-o corpul exact înainte de explozie.



26. Un om și o bilă se află într-un cărucior care se deplasează cu viteza constantă $v_0 = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Masa omului, căruciorului și bilei este de $m_1 = 100$ kg. Omul aruncă bila, de masă $m_2 = 20$ kg, cu viteza $v_2 = 14\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ față de cărucior (înainte de aruncare), în direcția de deplasare a căruciorului. Calculează viteza sistemului cărucior-om după aruncarea bilei atunci când:

a) bila a fost aruncat în sensul de mers al căruciorului;

b) bila a fost aruncat în sens opus sensului de mers al căruciorului.



Proiecte interdisciplinare

1. Studiază funcționarea unui roller-coaster folosind informațiile discutate la clasă sau surse documentare la alegere. Realizează o prezentare de 5–7 slide-uri în care să explici funcționarea roller-coaster-ului din punct de vedere energetic: transformarea energiei potențiale gravitaționale în energie cinetică și invers, pozițiile în care aceste energii sunt maxime, rolul forței de frecare și pierderile de energie mecanică transformate în energie termică. Formulează concluzii privind transformările energetice și importanța frecării asupra mișcării roller-coaster-ului.

2. Realizează o prezentare cu tema „Energia regenerabilă – soluția viitorului”, în care să compari energia regenerabilă cu energia neregenerabilă și să identifici impactul utilizării energiei regenerabile asupra mediului local.

TEST DE EVALUARE

Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Un corp cade liber în câmp gravitațional terestru, în apropierea suprafeței Pământului. Neglijând interacțiunea corpului cu aerul, mărimea fizică a cărei valoare rămâne constantă este:

a. energia potențială gravitațională a corpului;
b. energia cinetică a corpului;
c. energia mecanică totală a corpului;
d. viteza corpului.

2. Un corp, lansat pe o suprafață orizontală, se deplasează cu frecare. Se poate afirma că:

a. energia lui cinetică crește;
b. energia lui cinetică nu se modifică;
c. viteza lui nu se schimbă;
d. energia lui cinetică scade.

3. Într-un sistem conservativ de forțe, nu acționează:

a. forța elastică;
b. forța de tracțiune;
c. forța de atracție gravitațională;
d. forța electrostatică.

Scrie rezolvările complete pentru următoarele probleme:

4. Un resort are constanta elastică 1,2 kN/m. Cât este lucrul mecanic efectuat de resort pentru o întindere cu 1 cm?

5. Raportul maselor a două mașini este $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}$, iar raportul vitezelor este $\frac{v_1}{v_2}=2$. Care este raportul energiilor cinetice pentru aceste două corpuri, $\frac{E_{c1}}{E_{c2}}$?

6. Un copil aflat pe o săniuță alunecă la vale, pornind din repaus, pe un traseu ce poate fi considerat un plan înclinat de înălțime $h = 5$ m, continuat cu o porțiune orizontală. Masa copilului și a săniuței este $m = 40$ kg. Se consideră că viteza inițială pe porțiunea orizontală are aceeași valoare cu viteza finală pe planul înclinat, $v = 8$ m/s, iar coeficientul de frecare dintre săniuță și zăpadă este același pe tot traseul, având valoarea $\mu = 0{,}2$.

Determinați:

a. energia cinetică maximă a sistemului format din copil și săniuță;
b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare ce acționează asupra săniuței, în timpul coborârii acesteia pe planul înclinat;
c. tangenta unghiului format de planul înclinat cu orizontala;
d. puterea mecanică medie a forței de frecare pe planul înclinat;
e. distanța parcursă de săniuță, pe suprafața orizontală, până la oprire ($g = 10$ m/s^2).

Notă:
Subiectele 1,2,3 - câte 1 p fiecare.
Subiectele 4,5 - 0, 5 p fiecare.
Subiectul 6 - 5 p (1 p pentru fiecare răspuns)
Se acordă 1punct din oficiu.



La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să identifici mărimile fizice care influențează efectul de rotație al unei forțe;
- să explici, pe baze științifice, efectele de rotație produse de forțe în viața cotidiană;
- să aplici condițiile de echilibru pentru rezolvarea unor probleme și în situații practice;
- să explici rolul centrului de greutate în echilibrul corpurilor;
- să analizezi influența poziției centrului de greutate asupra stabilității și echilibrului corpurilor;
- să comunici eficient informații, argumente și concluzii științifice referitoare la echilibrul mecanic;
- să evaluezi importanța noțiunilor de echilibru mecanic pentru siguranța individului și pentru activitățile desfășurate în mediul înconjurător.

Capitolul 5

Echilibrul mecanic

5.1 Momentul forței

Imaginile din figurile 5.1.1.a sau 5.1.1.b arată că o forță poate produce rotirea unor corpuri.



Fig. 5.1.1.a



Fig. 5.1.1.b

Mărimea fizică ce caracterizează capacitatea unei forțe de a roti un corp în jurul unui punct sau al unei axe se numește **momentul forței.**

Momentul unei forțe se definește folosind noțiunea matematică de produs vectorial.

Produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, notat $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, este un vector cu următoarele caracteristici (fig. 5.1.2):

– *direcția* este perpendiculară pe planul format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$;

– *sensul* este sensul de înaintare al unui burghiu drept așezat perpendicular pe planul vectorilor care se rotește astfel încât să suprapună primul vector ($\vec{a}$) peste al II-lea vector ($\vec{b}$) (aceasta este regula burghiului) (fig. 5.1.3);

– *mărimea* este $c = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, unde α este unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

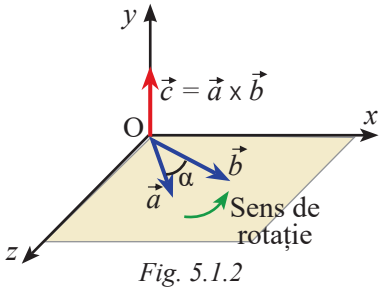


Fig. 5.1.2

Reține

Produsul vectorial nu este comutativ ($\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$).

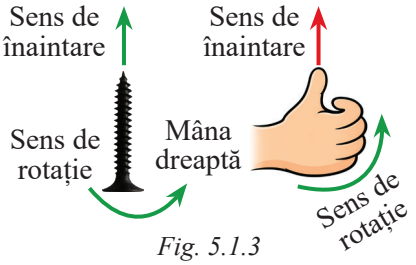


Fig. 5.1.3

Regula burghiului descrisă mai sus se poate aplica folosind mâna dreaptă (fig. 5.1.3)

Figura 5.1.4 prezintă simbolurile convenționale folosite pentru reprezentarea în plan a vectorilor care au orientări diferite în spațiu.

Pentru ușurarea reprezentării în spațiu a unor vectori se folosesc simbolurile din fig. 5.1.4:

– Cerc cu punct la mijloc înseamnă un vector perpendicular pe planul foii cu sensul în sus (sensul pozitiv al axei *Oy*);

– Cerc cu „X” la mijloc înseamnă un vector perpendicular pe planul foii cu sensul în jos (sensul negativ al axei *Oy*).

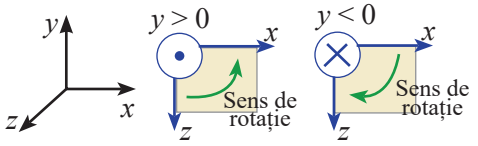


Fig. 5.1.4

INVESTIGHEAZĂ!

Cum poate fi obținut același efect de rotație asupra unui corp utilizând o forță de intensitate mai mică?

Scopul activității: investigarea modului în care efectul de rotație al unei forțe depinde de mărimea forței și de distanța dintre axa de rotație și suportul forței.

Materiale necesare: disc cu orificii ce se poate roti în jurul unui ax, corpuri de mase diferite care pot fi prinse de disc în diferite poziții (fig. 5.1.5).

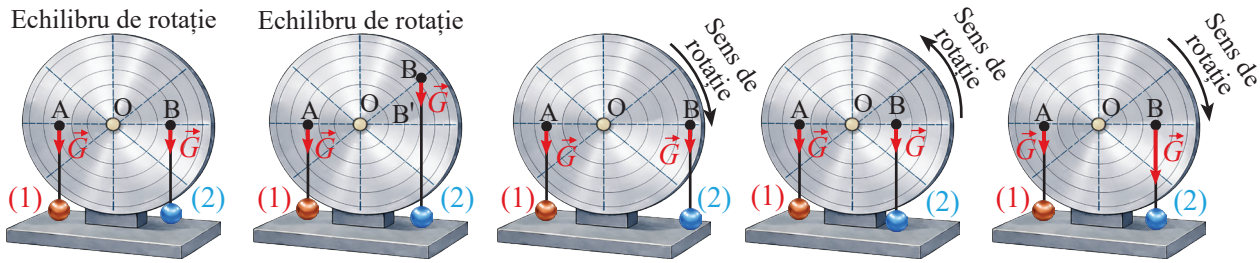


Fig. 5.1.5

Întrebarea investigației: mărimea forței este singurul factor de care produce modificarea efectului de rotație produs de o forță?

Ipoteză: efectul de rotație este mai puternic dacă distanța de la centrul de rotație la suportul forței este mai mare și dacă modulul forței este mai mare.

Modul de lucru:

– În două puncte aflate pe orizontală, la aceeași distanță de pol, pe disc se fixează două corpuri de greutăți egale (fig. 5.1.5 a). Discul este în echilibru. Notează distanța de la centrul de rotație la suportul forței ($OB = OA$).

– Menține greutatea G a corpului (2) și fixează punctul lui de prindere pe aceeași verticală, fără a modifica distanța de la suportul forței la pol ($OB = OB'$) (fig. 5.1.5 b).

– Menține greutatea G a corpului (2) și fixează punctul lui de prindere pe aceeași orizontală cu polul, mai departe de pol (fig. 5.1.5 c).

– Menține greutatea G a corpului (2) și fixează punctul lui de prindere pe aceeași orizontală mai aproape de pol (fig. 5.1.5 d).

– Fixează corpul (2) în același punct ca în situația inițială, dar se mărește greutatea lui (fig. 5.1.5 e).

– Compară efectul de rotație produs de greutatea corpului (2) cu efectul de rotație al corpului (1) – *corp martor* – care își păstrează permanent poziția și greutatea.

Completează tabelul cu observațiile tale:

Nr. determinării	OA/cm	G_1/N	OB/cm	OB'/cm	G_2/N	Observații – modificarea efectului de rotație față de corpul martor

Concluzii

a) Efectul de rotație produs de o forță nu se modifică dacă punctul de aplicație al forței se deplasează de-a lungul suportului forței.

b) Efectul de rotație produs de o forță depinde de distanța de la centrul de rotație la suportul forței (fig. 5.1.5. a, b, c, d).

c) Efectul de rotație produs de o forță depinde de mărimea forței (fig. 5.1.5. e).

Identifică situații în viața cotidiană în care poți aplica noțiunile studiate.

Momentul forței ($\vec{M}$)

Definiție

Momentul unei forțe ($\vec{F}$) față de un punct (pol A) este o mărime fizică vectorială (notată $\vec{M}_{F(A)}$) egală cu *produsul vectorial* dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței față de pol ($\vec{r}$) și vectorul forță ($\vec{F}$):

$$\vec{M}_{F(A)} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (5.1.1)$$

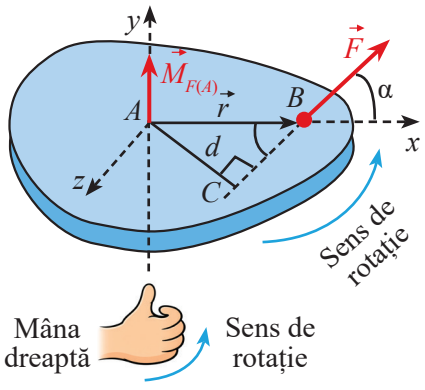


Fig. 5.1.6 a

$\vec{M}_{F(A)}$ are:

– direcția perpendiculară pe planul format de $\vec{r}$ și $\vec{F}$;

– sensul stabilit prin folosirea regulii burghiului (fig. 5.1.6 a) sau b);

– mărimea:

$$M_{F(A)} = r \cdot F \cdot \sin\alpha \qquad (5.1.2),$$

(unde α este unghiul dintre $\vec{r}$ și $\vec{F}$).

Caracteristicile vectorului $\vec{M}_{F(A)}$ sunt prezentate în figurile 5.1.6 a (reprezentare în spațiu folosind sistemul *xOyz*) sau 5.1.6 b (în care se folosesc simbolurile din fig. 5.1.4).

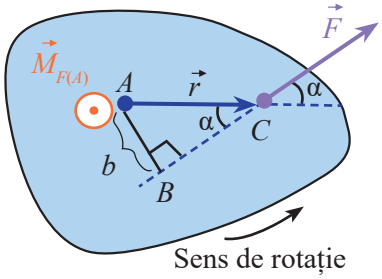


Fig. 5.1.6 b

Din Δ*ABC* (fig. 5.1.6.b) se poate scrie:

$$r \cdot \sin\alpha = AB = b = \text{brațul forței} \qquad (5.1.3)$$

Reține

Brațul forței (*b*) reprezintă mărimea perpendicularei dusă din pol pe suportul forței.

$$[M_{F(A)}] = \text{N} \cdot \text{m} \qquad (5.1.4)$$

Folosind relațiile (5.1.2) și (5.1.3), obținem

$$M_{F(A)} = b \cdot F \qquad (5.1.5)$$

Observații:

– Momentul unei forțe care trece prin pol (centrul de rotație) este nul.

– Dacă forțele și polul sunt coplanare, atunci momentele forțelor au aceeași direcție (perpendiculară pe planul comun format de forțe).

– Dacă asupra unui corp acționează mai multe forțe, momentul rezultant este suma vectorială a momentelor forțelor.

– Suma vectorială a momentelor unui sistem de forțe concurente în raport cu un pol este egală cu momentul rezultantei acestor forțe în raport cu același pol.

APLICĂ

Pe un disc vertical cu găuri ce se poate roti în plan vertical, în jurul punctului *A*, sunt prinse mai multe corpuri (fig. 5.1.7). Corpurile de aceeași culoare acționează asupra discului cu aceeași forță: $F_1 = 4$ N, $F_2 = 6$ N, $F_3 = 2$ N. Distanțele de la centrul de rotație *A* la suportul forțelor sunt $AB = 12$ cm, $AD = 6$ cm, $AC = 15$ cm, $AE = 7$ cm. Calculează momentul rezultant și stabilește sensul de rotație al discului.

Observații:

– Toate forțele și polul *A* sunt coplanare, deci momentele forțelor au aceeași direcție (perpendiculară pe planul comun), iar sensul lor depinde numai de sensul de rotație produs de forță.

– Toate segmentele *AB*, *AD*, *AC* și *AE* reprezintă *brațele forțelor* corespunzătoare.

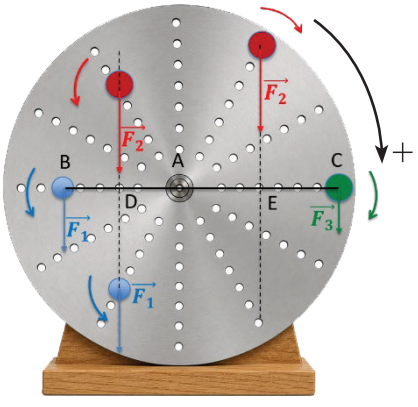


Fig. 5.1.7

Rezolvare:

Alege un sens de rotație căruia să îi corespundă un sens pozitiv (de exemplu, sensul orar) al momentului (fig. 5.1.7).

Stabilește sensul de rotație produs de fiecare forță (fig. 5.1.7).

Aplică relația (5.1.5) având în vedere convenția de semn. Se obține:

$$M_{rez} = AE \cdot F_2 + AC \cdot F_3 - AD \cdot F_2 - AD \cdot F_1 - AB \cdot F_1 = -36 \text{ Nm}.$$

Momentul rezultant este negativ, deci discul se va învârti în *sens anti-orar.*

5.2. Echilibrul de translație și de rotație

Un corp solid este format din puncte materiale ale căror distanțe reciproce rămân neschimbate **(modelul solidului rigid)**. Corpul solid rigid este un corp nedeformabil.

Mișcarea de translație a unui corp rigid este mișcarea în care orice dreaptă legată de corp se mișcă paralel cu ea însăși în timpul mișcării corpului.

Forțele care acționează simultan asupra unui corp formează un *sistem de forțe*. Atunci când suporturile forțelor se întâlnesc în același punct, *forțele sunt concurente.*

Rezultanta unui sistem de forțe produce aceleași efecte asupra corpului ca și sistemul inițial.

Rezultanta unui sistem de forțe se obține prin compunerea forțelor (suma vectorială a forțelor).

Reține

Condiția de echilibru de translație: *Un corp solid este în echilibru de translație dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra lui este nulă.*

$$\vec{R} = \vec{0} \qquad (5.2.1)$$

Observații:

1. Un corp nu poate fi în echilibru de translație sub acțiunea unei singure forțe;

2. Un punct material este în echilibru de translație sub acțiunea a 2 forțe dacă forțele au aceeași mărime și direcție, dar sens contrar (fig. 5.2.1).



Fig. 5.2.1

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (5.2.2)$$

3. Un punct material este în echilibru sub acțiunea a 3 forțe dacă rezultanta a două dintre ele are aceeași direcție și mărime, dar sens contrar cu cea de a treia (fig. 5.2.2).

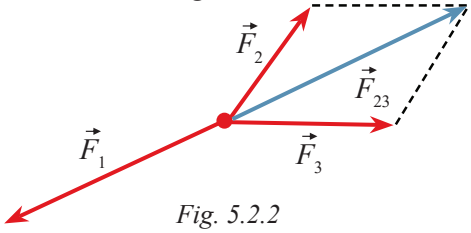


Fig. 5.2.2

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 = -(\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = -\vec{F}_{23} \qquad (5.2.3)$$

Reține

Condiția de echilibru de rotație: *Un corp solid este în echilibru de rotație dacă momentul rezultant al forțelor ce acționează asupra lui este nul, față de orice pol.*

$$\vec{M}_{rez} = \vec{0} \qquad (5.2.4)$$

Reține

– În cazul forțelor coplanare, un corp este în echilibru de rotație dacă suma momentelor forțelor care rotesc corpul într-un sens este egală cu suma momentelor forțelor care rotesc corpul în sens contrar.

– Un corp solid este în echilibru atunci când sunt îndeplinite condițiile de echilibru de translație și echilibru de rotație.

APLICĂ

1. O bilă cu masa $m = 400$ g, legată între două resorturi verticale (fi. 5.2.3a), este în echilibru. Constantele resorturilor sunt $k_1 = 100$ N/m și $k_2 = 150$ N/m. Resortul (1) este deformat cu $x_1 = 1$ cm. Calculează deformarea resortului (2) ($g = 10$ m/s^2).

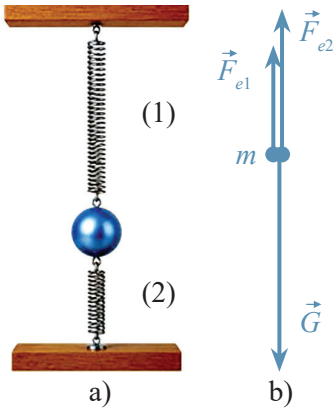


Fig. 5.2.3

Rezolvare:

Reprezintă bila printr-un punct împreună cu familia ei de forțe (diagrama corpului liber) (fig. 5.2.3b).

Conform relației (5.2.1):

$$\vec{G}+\vec{F}_{e1}+\vec{F}_{e2}=\vec{0}\Rightarrow G-F_{e1}-F_{e2}=0\Rightarrow\ mg-k_1x_1-k_1x_2=0\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{mg-k_1x_1}{k_2}=0,02\ \text{m}=2\ \text{cm}$$

2. O lampă cu masa de 1,73 kg este prinsă de tavan cu ajutorul a două cabluri (fig. 5.2.4a). La echilibru, cele două cabluri sunt simetrice față de verticală și formează unghiul $\alpha = 30°$ cu aceasta. Calculează tensiunea din cabluri ($g = 10\ \text{m/s}^2$).

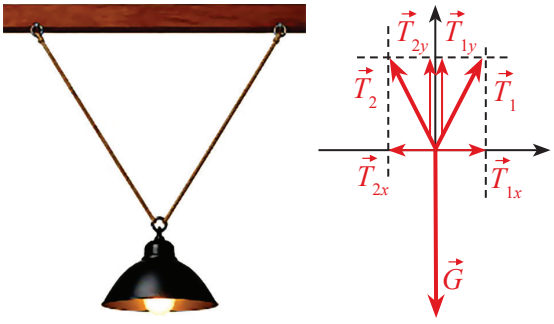


Fig. 5.2.4

Rezolvare:

Reprezintă lampa printr-un punct împreună cu familia ei de forțe (fig. 5.2.3b). Descompune forțele după cele două axe și calculează mărimile componentelor:

$$T_{1x}=T_1\sin\alpha \text{ și } T_{1y}=T_1\cos\alpha \qquad (5.2.7)$$

Exprimă condiția de echilibru după *Ox* și ține cont de relația (5.2.7):

$$T_{1x}=T_{2x}\Rightarrow T_1\sin\alpha=T_2\sin\alpha\Rightarrow T_1=T_2 \qquad (5.2.8)$$

Exprimă condiția de echilibru după *Oy* și ține cont de relațiile (5.2.7) și (5.2.8):

$$\vec{G}+\vec{T}_{1y}+\vec{T}_{2y}=\vec{0}\Rightarrow\ T_{1y}+T_{2_y}-G=0\Rightarrow 2T_1\cos\alpha=mg\Rightarrow T_1=\frac{mg}{2\cos\alpha}=10\ \text{N}=T_2.$$

3. Pe o bară subțire, de masă neglijabilă, sunt așezate două corpuri (fig. 5.2.5): C_1 are masa de 4 kg și $AC_1 = 40$ cm, iar C_2 are masa de 8 kg și $AC_2 = 80$ cm. Cunoscând distanța $AB = 1{,}6$ m, calculează forțele cu care bara apasă pe suporturile din *A* și *B*.

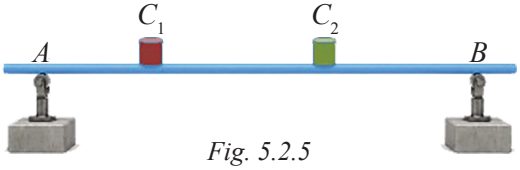


Fig. 5.2.5

Rezolvare:

Mărimile forțelor de apăsare în *A* și *B* sunt egale în modul cu normalele din *A* și *B*.

În fig. 5.2.6 sunt reprezentate toate forțele care acționează asupra barei. Scrie condiția de echilibru de rotație conform relației (5.2.4) și ține cont că momentele forțelor au aceeași direcție, iar sensurile sunt determinate de sensul de rotație produs de fiecare forță în parte.

Alegem polul *A*:

$$M_A=0\Rightarrow M_{1(A)}+M_{2(A)}-M_{N_B(A)}=0\Rightarrow$$

$$m_1g\cdot AC_1+m_2g\cdot AC_2=N_B\cdot AB\Rightarrow$$

$$N_B=\frac{m_1g\cdot AC_1+m_2g\cdot AC_2}{AB}=50\ \text{N} \qquad (5.2.9)$$

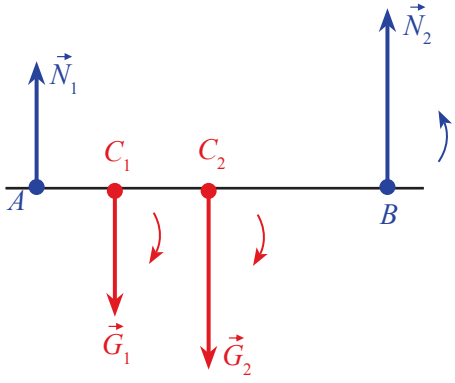


Fig. 5.2.6

Scrie condiția de echilibru de translație (relația 5.2.1) pentru sistemul din fig. 5.2.6:

$$N_A+N_B=G_1+G_2\Rightarrow N_A=m_1g+m_2g-N_B=70\ \text{N}$$

5.3. Centrul de greutate

Un corp poate fi considerat ca fiind format dintr-un număr foarte mare de puncte materiale. Greutățile lor formează un sistem de forțe paralele ale căror rezultantă este greutatea corpului și ea are un anumit punct de aplicație în corp.

Reține

Centrul de greutate este punctul de aplicație al greutății corpului (fig. 5.3.1)

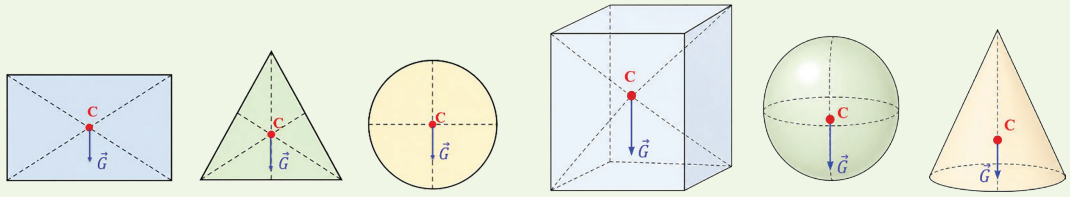


Fig. 5.3.1

Observații:

– Centrul de greutate al corpurilor omogene, cu forme geometrice regulate, care posedă axe sau plane de simetrie va fi totdeauna situat pe axa, respectiv pe planul de simetrie (fig. 5.3.1).

– Uneori, centrul de greutate se găsește în afara substanței corpului (de exemplu, la un inel).

EXPERIMENTEAZĂ: Determinarea poziției centrului de greutate pentru un corp plan cu formă geometrică neregulată

Materiale necesare

– carton rigid de formă neregulată,
– ac sau cui subțire,
– fir cu plumb,
– creion, riglă.

Precizare teoretică

Un corp suspendat într-un punct este în echilibru dacă verticala dusă prin punctul de suspensie trece prin centrul de greutate.

Modul de lucru (fig. 5.3.2)

a) decupează din carton un corp plan de formă neregulată;
b) realizează un mic orificiu aproape de marginea corpului;
c) suspendă corpul în acest orificiu;
d) atârnă un fir cu plumb în același punct de suspensie;
e) trasează pe carton direcția firului cu plumb;
f) repetă procedeul suspendând corpul din alte două puncte.

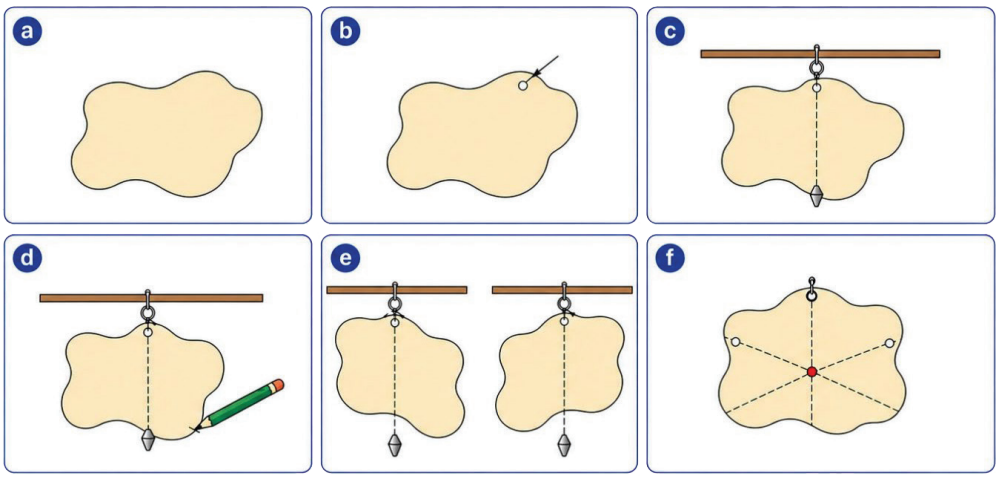


Fig. 5.3.2

Observație: Cele trei linii trasate se intersectează în același punct. Acesta este centrul de greutate.

În cazul unui corp capabil să se rotească în jurul unei axe, echilibrul poate fi realizat pentru diferite poziții ale centrului de greutate față de axa de rotație.

a) **Centrul de greutate este sub axa de rotație** (fig. 5.3.3): Corpul este în poziția de *echilibru stabil.* În acest caz, după o mică abatere din poziția de echilibru, corpul tinde să revină la poziția poziția inițială de echilibru deoarece momentul greutății față de punctul de suspensie produce rotirea corpului și el **revine** în poziția inițială de echilibru.

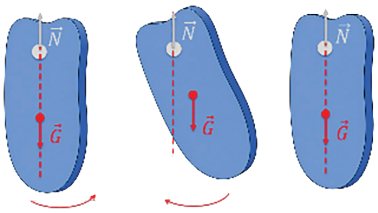


Fig. 5.3.3

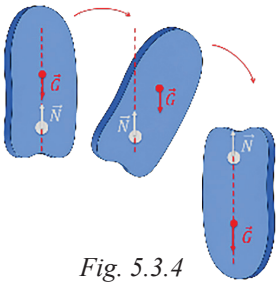


Fig. 5.3.4

b) **Centrul de greutate este deasupra axului de rotație** (fig. 5.3.4): Corpul este în poziția de *echilibru instabil.* În acest caz, după o mică abatere din poziția de echilibru, corpul NU mai revine la poziția poziția inițială de echilibru. Momentul greutății față de punctul de suspensie rotește corpul până când acesta ajunge în poziția de echilibru stabil.

c) **Centrul de greutate este pe axul de rotație** (fig. 5.3.5): Corpul este în poziția de *echilibru indiferent.* În acest caz, după o mică abatere din poziția de echilibru, corpul rămâne în noua poziție.

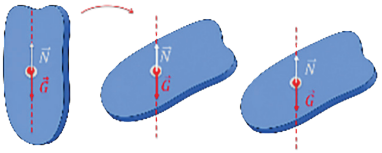


Fig. 5.3.5

Cele trei tipuri de echilibru se regăsesc și în cazul corpurilor așezate (fig. 5.3.6).

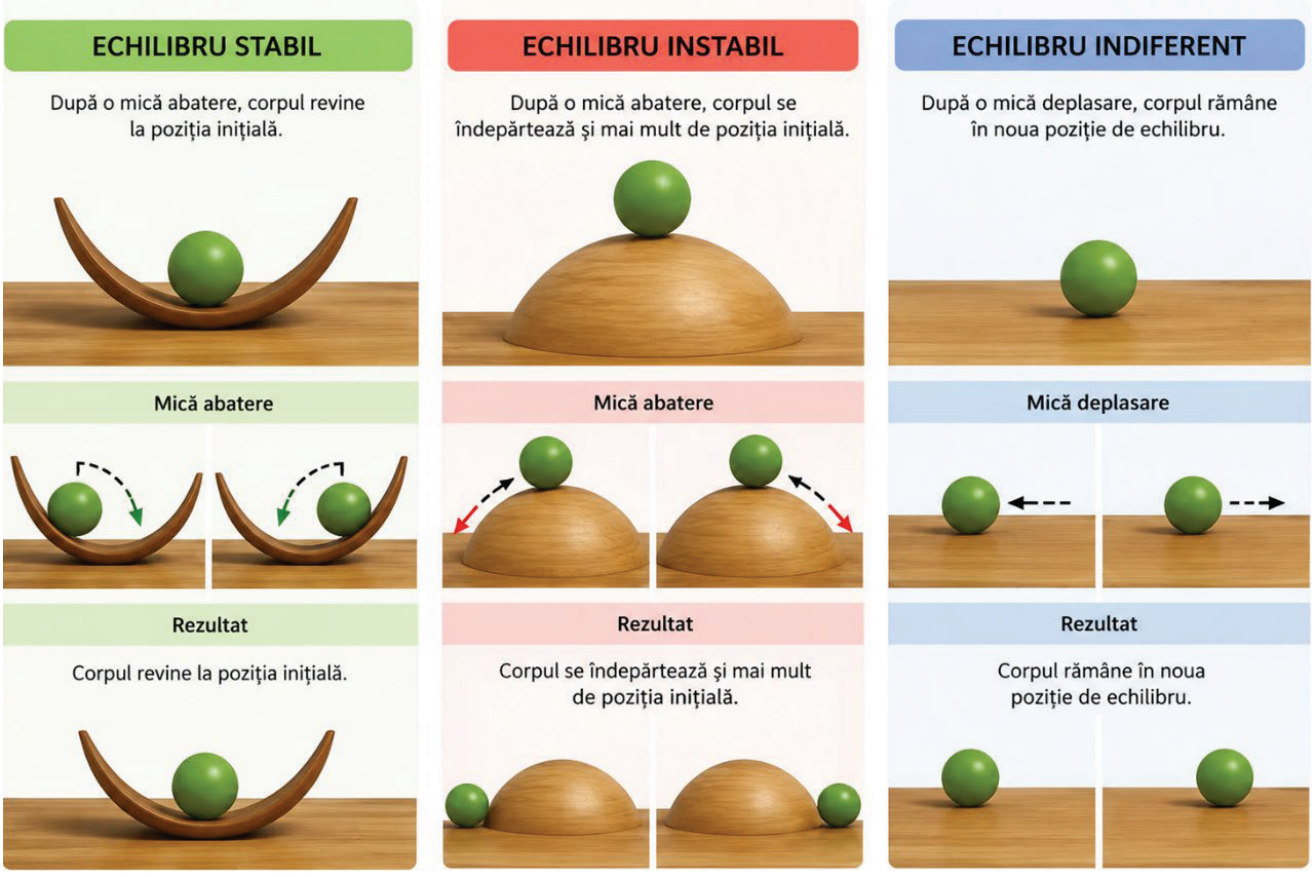


Fig. 5.3.6

Reține

Corpurile care se sprijină pe o suprafață sunt în echilibru stabil dacă verticala dusă prin centrul de greutate cade în interiorul suprafeței de sprijin (fig. 5.3.7).

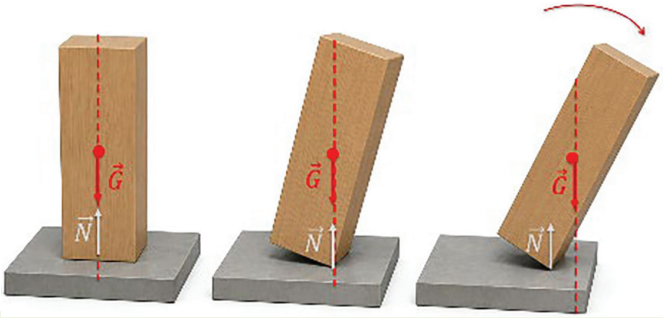


Fig. 5.3.7

Reține

– Un corp se află în echilibru stabil dacă energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ este minimă;

– Un corp se află în echilibru instabil dacă energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ este maximă;

– Un corp se află în echilibru indiferent dacă energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ rămâne constantă prin deplasarea corpului.

Corpurile au tendința de a se așeza, de la sine, în poziția cu energie potențială minimă (poziția de echilibru stabil).

Observații:

1. Stabilitatea unui corp este influențată de: poziția centrului de greutate; dimensiunea bazei de sprijin; forma corpului.

2. Un corp este cu atât mai stabil cu cât: centrul de greutate este mai jos și baza de sprijin este mai mare.

În imaginile de mai jos sunt prezentate stări de echilibru curioase întâlnite în realitate.



Fig. 5.3.8. Celebrul model de scaun „Gravity Balans" creat de norvegianul Peter Opsvik



Fig. 5.3.9. Pescuit tradițional în Sri Lanka



Fig. 5.3.10. Les Voyageurs – sculptură realizată de artistul Bruno Catalano

APLICĂ

1. Cum explici echilibrul sculpturii din seria Les Voyageurs (fig. 5.3.10), a surferului (fig. 5.3.11 a) și a telefonului aflat pe suportul de telefon (fig. 5.3.11 b)?



a)



b)

Fig. 5.3.11

Rezolvare:

Sculptura Les Voyageurs este construită din două părți: partea din stânga și cea din dreapta. Ambele sunt realizate astfel încât verticala dusă prin centrul de greutate să cadă în interiorul suprafeței de sprijin. La fel, surferul și telefonul sunt în echilibru pentru că verticala dusă prin centrul lor de greutate cade în interiorul suprafeței de sprijin.



a) b)

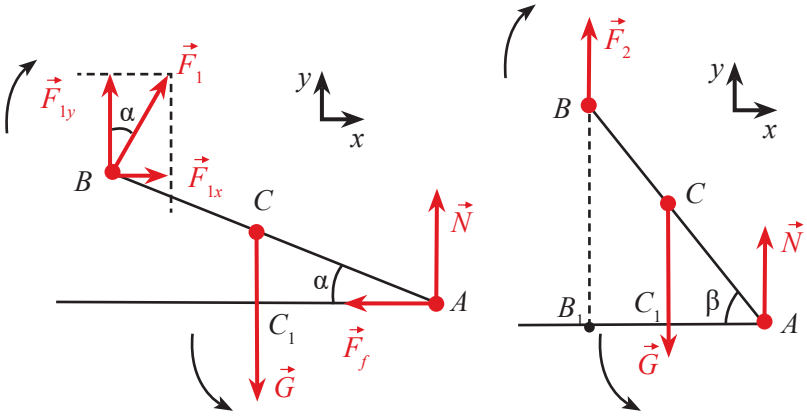
Fig. 5.3.12

2. O scândură cu masa m = 100 kg este ridicată de la pământ de un muncitor. Atunci când scândura formează cu orizontala un unghi $\alpha = 30°$, muncitorul acționează cu o forță $\vec{F}_1$, perpendiculară pe scândură (fig.5.3.12 a), iar atunci când bara formează cu orizontala un unghi $\beta = 60°$, el acționează cu o forță verticală $\vec{F}_2$ (fig. 5.3.12 b). Calculează:

a) mărimea forței $\vec{F}_1$;

b) mărimea forței $\vec{F}_2$;

c) valoarea coeficientului de frecare minim, μ, dintre scândură și sol astfel ca în cazul a), scândura să nu alunece (g = 10 m/s^2).



a) b)

Fig. 5.3.13

Rezolvare:

a. În figurile 5.3.13 a și 5.3.13 b sunt reprezentate toate forțele care acționează asupra barei (AB) în cele două situații descrise de problemă și sensurile de rotație produse de forțe. C este centrul de greutate al barei și se află la mijlocul barei ($AC = AB/2$).

În cazul a, bara (AB) este în echilibru sub acțiunea, tuturor forțelor reprezentate în fig. 5.3.13 a.

Folosește condițiile de echilibru de rotație față de polul A (5.2.4) și condițiile de echilibru de translație relația (5.2.1) după cele două axe:

$$\vec{M}_{F_1(A)} + \vec{M}_{F_2(A)} = \vec{0} \Rightarrow AB \cdot F_1 = AC_1 \cdot G \Rightarrow AB \cdot F_1 = \left(\frac{AB}{2} \cdot \cos\alpha\right) \cdot mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{mg}{2} \cdot \cos\alpha = 432{,}5\ \text{N} \qquad (5.3.1)$$

b. Aplică condiția de echilibru de rotație în cazul b:

$$M_{F_2(A)} = M_{G(A)} \Rightarrow AB_1 \cdot F_2 = AC_1 \cdot G \Rightarrow AB \cdot \cos\beta \cdot F_2 = \left(\frac{AB}{2} \cdot \cos\beta\right) \cdot mg \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{mg}{2} = 500\ \text{N}.$$

c. În cazul a, aplică condiția de echilibru de translație:

– după Ox:

$$F_{1x} = F_f = \mu N;\ \ F_1 \sin\alpha = F_f = \mu N \qquad (5.3.2)$$

– după Oy:

$$F_{1y} + N = G \Rightarrow N = G - F_{1y} = mg - F_1 \cdot \cos\alpha \qquad (5.3.3)$$

Din relațiile (5.3.2) și (5.3.3), obții:

$$F_1 \sin\alpha = \mu(mg - F_1\cos\alpha) \Rightarrow \mu = \frac{F_1 \sin\alpha}{(mg - F_1\cos\alpha)} \approx 0,34$$

Observație: Pentru $\mu \geq 0,34$, scândura nu alunecă față de sol, deci $\mu = 0,34$ reprezintă valoarea minimă cerută.

3. Într-o sală de sport sunt folosite sistemele de forță reprezentate în fig. 5.3.14. Știind că bara metalică are greutate neglijabilă, iar cele trei discuri din partea stângă a barei au masa de 60 kg și centrul de greutate în A, cele două din dreapta au masa de 30 kg și centrul de greutate în B, și AB = 1,2 m, determină poziția de greutate a sistemului.



Fig. 5.3.14

Rezolvare:

Greutatea sistemului este rezultanta greutăților ce acționează în A și B (fig. 5.3.15). Momentul greutății totale față de un pol ($\vec{M}_{G(A)}$) este suma vectorială a momentelor greutăților corpurilor față de pol.

$$\vec{M}_{G(A)} = \vec{M}_{G_1(A)} + \vec{M}_{G_2(A)} \qquad (5.3.4)$$

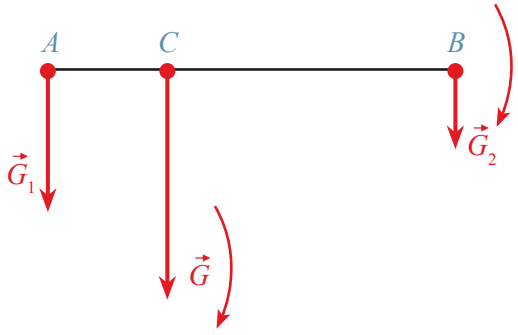


Fig. 5.3.15

Observație:

Toate cele trei forțe sunt coplanare și deci toate momentele au aceeași direcție, iar sensurile lor depind de sensul de rotație produs de fiecare forță în parte. $\vec{G}_1$ trece prin polul A, deci $\vec{M}_{G_1(A)} = 0$.

$$M_{G(A)} = M_{G_1(A)} + M_{G_2(A)} = M_{G_2(A)}$$

$$AC \cdot G = AB \cdot G_1 \Rightarrow AC \cdot g \cdot (m_1 + m_2) = AB \cdot m_1 \cdot g \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot m_2}{m_1 + m_2} = 0,4 \text{ m}.$$

4. O bară omogenă este îndoită în două părți de lungimi egale în unghi drept și prinsă la unul din capete într-o articulație (ca în fig. 5.3.16). Calculează unghiul α format de partea prinsă în articulație și verticală. Frecările sunt neglijabile.

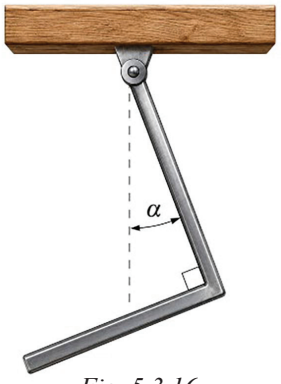


Fig. 5.3.16

Rezolvare:

Verticala dusă prin punctul de suspensie trece prin centrul de greutate al sistemului. Fiecare parte a barei are centrul de greutate la mijlocul ei, (C_1) pentru partea legată la punctul de suspensie și (C_2) pentru restul barei. Cum cele două greutăți sunt egale, centrul de greutate al întregului sistem este la mijlocul distanței dintre (C_1C_2) (fig. 5.3.17).

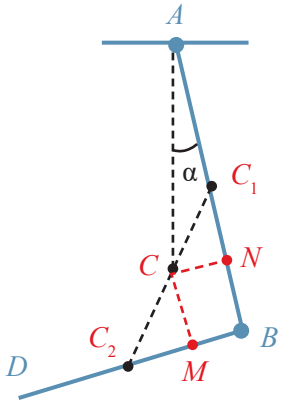


Fig. 5.3.17

În fig. 5.3.17: $CC_1 = CC_2$, $AC_1 = C_1B = \frac{AB}{2}$, $DC_2 = C_2B = \frac{BD}{2} = \frac{AB}{2}$,

$$CN = MB = \frac{C_2B}{2} = \frac{BD}{4} = \frac{AB}{4},\ C_1N = \frac{C_1B}{2} = \frac{AB}{4}$$

$$AN = AC_1 + C_1N = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{4} = \frac{3AB}{4}.$$

În ΔACN: $N = 90^\circ \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{CN}{AN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18^\circ 30.$

EXERSEAZĂ

1. O lampă de iluminat cu masa $m = 10$ kg este suspendată la mijlocul unei străzi cu lățimea $l = 10$ m cu un cablu ce rezistă la o tensiune $T = 500$ N. Care este înălțimea minimă a punctelor de prindere a cablului astfel ca lampa să se afle la înălțimea $h = 5$ m?

2. O tijă omogenă cu lungimea $L = 6$ m are prima porțiune cu lungimea $\ell = 1$ m așezată pe o platformă orizontală, iar cealaltă porțiune se află în afara platformei (ca în fig. 5.3.18). La capătul exterior este aplicată o forță verticală F. Tija rămâne în poziție orizontală dacă valorile forței F sunt cuprinse între o valoare minimă F_{min} și o valoare maximă F_{max}. Determină raportul F_{max}/F_{min}, dacă grosimea tijei este mult mai mică decât lungimea.

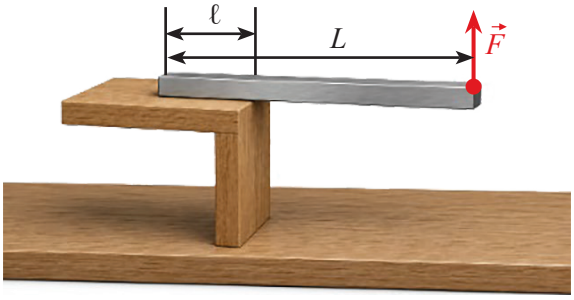


Fig. 5.3.18



Fig. 5.3.19

3. O minge omogenă de masă $m = 4$ kg și rază $R = 15$ cm se sprijină pe un jgheab ca în fig. 5.3.19. Cele două laturi ale jgheabului sunt plane și formează cu orizontala același unghi $\alpha = 60°$. Determină apăsarea exercitată de minge pe o latură a jgheabului, dacă frecările sunt neglijabile ($g = 10$ m/s^2).

4. Un om cu masa de 90 kg traversează un râu folosind o scândură (fig. 5.3.20). Scândura are lungimea de 8 m și masa de 50 kg. Calculează forțele de apăsare exercitate de capetele scândurii pe maluri atunci când omul se află la 2 m de malul din stânga.

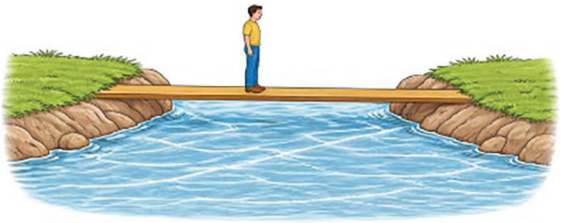


Fig. 5.3.20

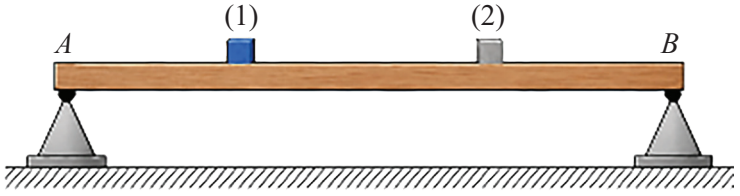


Fig. 5.3.21

5. Pe o scândură cu lungimea de 8 m și masa de 10 kg se află doua corpuri (fig. 5.3.21). Cel albastru, cu m_1=4 kg, se află la 3 m de capătul A al scândurii, iar corpul (2), gri, se află la 2 m de capătul B. Calculează masa corpului (2) dacă apăsarea în B este de 125 N.

6. Un muncitor cu masa de 80 kg urcă pe o scară cu masa de 50 kg și cu lungimea de 6 m (fig. 5.3.22). Scara se sprijină pe un perete vertical, fără frecare, într-un punct situat la înălțimea de 4,8 m față de sol. La un moment dat, centrul de greutate al muncitorului se află la o treime din lungimea scării față de capătul aflat pe sol. Știind că centrul de greutate al scării este situat la mijlocul acesteia, calculează mărimea forței de frecare dintre scară și sol (g = 10 m/s^2).



Fig. 5.3.22



Fig. 5.3.23

7. O bară, cu masa neglijabilă, este formată din două părți sudate care fac între ele un unghi de 135° (fig. 5.3.23). Bara se poate roti în jurul punctului O. Porțiunea orizontală are lungimea L_1 și la capătul ei se află centrul de greutate al unui manșon cu greutatea $G = 100$ N. Celălalt capăt se sprijină pe un perete neted la distanța L_2 ($L_2 = L_1/2$) față de O. Calculează mărimea forței ce se exercită în articulație.

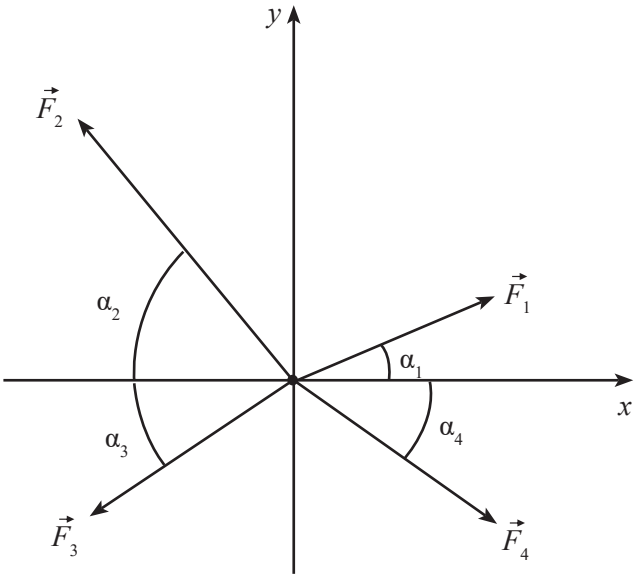


Fig. 5.3.24

8. Asupra unui corp aflat pe un plan orizontal acționează simultan patru forțe coplanare, orizontale, orientate ca în fig. 5.3.24. Mărimile forțelor și unghiurile făcute cu axa Ox sunt: $F_1 = 40$ N, $\alpha_1 = 25°$, $F_2 = 60$ N, $\alpha_2 = 50°$, $F_3 = 50$ N, $\alpha_3 = 35°$; $F_4 = 45$ N, $\alpha_4 = 40°$. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}20$. Determină masa minimă pe care trebuie să o aibă corpul pentru ca acesta să rămână în repaus.

(*Date utile*: sin 25° = 0,42; cos 25° = 0,91; sin 35° = 0,57; cos 35° = 0,82; sin 40° = 0,64; cos 40° = 0,77; sin 50° = 0,77; cos 50° = 0,64)

9. În vârfurile unui pătrat cu latura l sunt amplasate patru puncte materiale. Parcurgând vârfurile pătratului în sens orar, începând din colțul stânga-jos (fig. 5.3.25), masele au valorile m, $2m$, $3m$ și $4m$. Determină poziția centrului de greutate al sistemului de puncte materiale față de sistemul de axe xOy din figura alăturată.

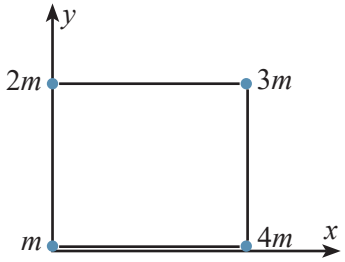


Fig. 5.3.25

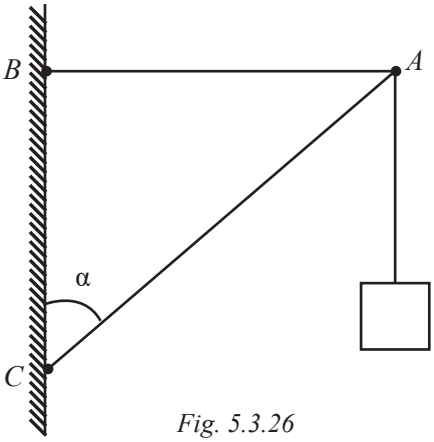


Fig. 5.3.26

10. De capătul A al unei console, ca în fig. 5.3.26, se atârnă un corp cu masa $m = 20$ kg.

a) Știind că unghiul $\alpha = 60°$, calculează tensiunile din barele AB și AC.

b) Care trebuie să fie unghiul α pentru ca tensiunea din suportul AC să fie de două ori mai mare decât cea din suportul AB?

11. O bară omogenă, cu secțiune constantă, se sprijină cu un capăt pe un perete vertical, iar cu celălalt capăt pe un plan orizontal. Bara formează unghiul α cu planul orizontal. Coeficienții de frecare dintre bară și perete, respectiv dintre bară și planul orizontal, sunt μ_1 și μ_2. Determină relația dintre α, μ_1 și μ_2 pentru ca bara să rămână în echilibru.

12. Un corp de masă $M = 6$ kg este suspendat cu două fire de lungime $l = 1$ m, ale căror capete sunt prinse de două șaibe de masă $m = 2$ kg fiecare, plasate pe o tijă orizontală (fig. 5.3.27). Coeficientul de frecare dintre șaibe și tijă este $\mu = 0{,}8$. Calculează valorile distanței x dintre șaibe atunci când sistemul este în echilibru.

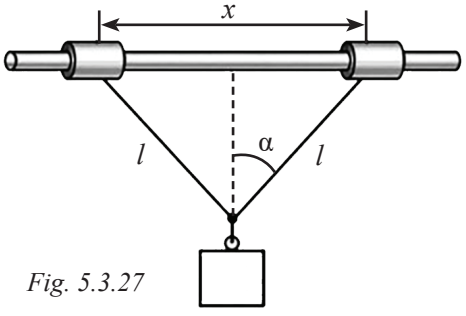


Fig. 5.3.27

TEST DE EVALUARE

Se acordă 1 punct din oficiu.

1. Identifică afirmația greșită și notează litera corespunzătoare în caiet. **(0,5 p)**

Momentul unei forțe $\vec{F}$ față de un pol:

a. este o mărime fizică vectorială;

b. are direcția perpendiculară pe planul format din vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței și vectorul forță;

c. este reprezentat corect în fig. T1;

d. este nul atunci când direcția forței trece prin pol.

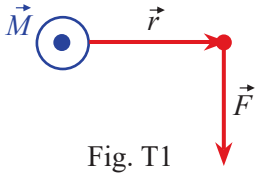


Fig. T1

2. Identifică afirmația corectă și notează litera corespunzătoare în caiet. **(0,5 p)**

Un corp solid este în echilibru:

a. atunci când verticala dusă prin punctul de suspensie nu trece prin centrul de greutate;

b. atunci când verticala dusă prin centrul de greutate cade în interiorul suprafeței de sprijin;

c. totdeauna atunci când $\vec{R} = \vec{0}$; totdeauna atunci când $\vec{M}_{rez} = \vec{0}$.

3. Scrie în caiet afirmațiile de mai jos și indică pentru fiecare dacă este adevărată (**A**) sau falsă (**F**): **(0,5 p)**

a. Un corp aflat în poziția de echilibru stabil are energia potențială este maximă.

b. Centrul de greutate este punctul de aplicație al greutății corpului.

c. Stabilitatea unui corp așezat este influențată numai de poziția centrului de greutate.

d. Centrul de greutate al unui triunghi este la intersecția înălțimilor.

4. Justifică alegerea făcută la subpunctul c al exercițiului anterior. **(0,5 p)**

5. O bară *AB* cu lungimea de 1,2 m este formată prin sudarea a două bucăți omogene de lungimi egale. **(1 p)**
AD are masa $m_1 = 20$ kg și *DB* are masa $m_2 = 40$ kg. Distanța de la capătul *A* la centrul de greutate al barei este:

a. 60 cm; b. 70 cm; c. 80 cm; d. 45 cm.

6. O bară omogenă *AB*, de secțiune constantă, are lungimea de 2 m și masa de 10 kg. Bara se sprijină într-un punct aflat la 20 cm de centrul ei de greutate mai aproape de *A*. Pentru ca bara să rămână orizontală în *A* se așază un corp de dimensiuni neglijabile cu masa *m*. Masa corpului așezat în *A* este: **(1 p)**

a. 2,5 kg; b. 1,5 kg; c. 4 kg; d. 2 kg.

7. Trei forțe care au aceeași mărime *F* fac între ele un unghi de 120°. Calculează mărimea rezultantei celor trei forțe. **(1 p)**

8. Roata Falkirk (Scoția) este un lift pentru ambarcațiuni care ridică bărcile între două canale aflate la înălțimi diferite. Ea are două gondole aflate la aceeași distanță $R = 15$ m față de axul de rotație. La un moment dat, masele celor două gondole sunt: $m_1 = 5{,}0 \cdot 10^5$ kg și $m_2 = 4{,}98 \cdot 10^5$ kg ($g = 10$ m/s^2).


Fig. T2

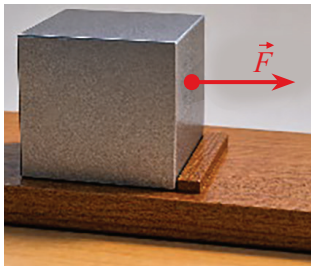


Fig. T3

a) Determină momentul rezultant care pune roata în mișcare.

b) Explică de ce roata poate funcționa cu un consum redus de energie, deși masele transportate sunt foarte mari. **(2 p)**

9. Un corp cubic cu latura $\ell = 0{,}4$ m și cu masa $m = 40$ kg este așezat pe un plan orizontal (fig. T3). Asupra lui acționează o forță orizontală $F = 400$ N. Determină înălțimea minimă la care trebuie aplicată forța pentru a produce răsturnarea cubului ($g = 10$ m/s^2). **(2 p)**



La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să înțelegi legătura dintre conceptele de fizică studiate și rolul lor în siguranța circulației rutiere;
- să identifici în situațiile de zi cu zi distanța necesară pentru frânare și oprirea unui autovehicul;
- să conștientizezi cât de important este un timp de reacție rapid;
- să traversezi strada în mod corect și sigur, folosind trecerea de pietoni și respectând regulile învățate.

Capitolul 6

Temă integratoare

6.1. Elemente de siguranță rutieră (timp de reacție, distanță de frânare, rază de viraj)

În fiecare zi participăm la trafic, fie ca pietoni, fie ca pasageri sau conducători de vehicule. În spatele regulilor de circulație se află principii fizice fundamentale, studiate în mecanică.

Respectarea regulilor de circulație înseamnă aplicarea corectă a legilor fizicii pentru **siguranța ta** și a celorlalți participanți la trafic.

Cunoașterea legilor fizicii permite explicarea unor reguli esențiale, precum păstrarea distanței față de vehiculul din față, utilizarea centurii de siguranță sau adaptarea vitezei la condițiile de drum. În **distanța de oprire** a unui vehicul este inclusă distanța parcursă în **timpul de reacție** și apoi **distanța de frânare.**

Timpul de reacție este timpul scurs din momentul în care șoferul vede obstacolul până în momentul în care apasă pe frână. Timpul de reacție variază între 0,7 s și 3 s în funcție de starea șoferului. În acest interval de timp, mașina are o mișcare rectilinie și uniformă și, pe această porțiune, frâna vehiculului nu este folosită. Distanța parcursă în acest timp, numită **distanță de reacție** (d_r) (vezi fig. 6.1), crește dacă timpul de reacție crește. Acest lucru se întâmplă dacă șoferul este obosit, neatent, sub influența alcoolului sau a altor droguri.

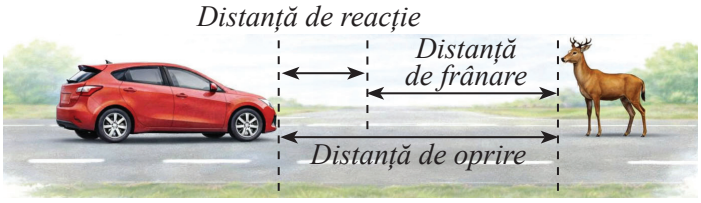


Fig. 6.1

Conform relațiilor cunoscute de la capitolul 2. *Elemente de cinematică*:

$$d_r = v \cdot t_r \quad (6.1)$$

Distanța de frânare este distanța necesară pentru a opri mașina din momentul acționării frânei. Aceasta depinde de starea drumului și comanda dată de șofer. *Distanța de frânare crește dacă*: frânele sau cauciucurile mașinii sunt sunt într-o stare necorespunzătoare; condițiile de drum și de vreme sunt dificile (de exemplu, polei sau umezeală); mașina are o masă mai mare (de exemplu, autocar sau camion).

Timpul de frânare este timpul în care mașina parcurge distanța de frânare. În acest timp, mașina are o mișcare uniform încetinită. Folosind cunoștințele căpătate în capitolul „2. Elemente de cinematică”, distanța de frânare se poate calcula din relația:

$$d_f = \frac{v^2}{2a_f} \quad (6.2)$$

Distanța de frânare (d_f) este cu atât mai mare cu cât viteza vehiculului (v) este mai mare și accelerația de frânare este mai mică.

Distanța de oprire (d_{op}) (vezi fig. 6.1) este suma dintre distanța de reacție (d_r) și distanța de frânare (d_f).

$$d_{op} = d_r + d_f \Rightarrow d_{op} = v \cdot t_r + \frac{v^2}{2a_f} \quad (6.3)$$

Reține

– o mașină nu poate opri instantaneu datorită inerției. Ea are nevoie de timp și distanță pentru oprire;

– o mașină cu masă mai mare are o distanță de oprire mai mare (fig. 6.2);

– *mașinile nu pot frâna cu roțile blocate* pentru că, în acest caz, mașina alunecă necontrolat și nu mai urmează direcția dorită de șofer. (Există sisteme care se opun blocării roților, cum ar fi ABS „Anti-lock Braking Sistem”)


Fig. 6.2. Mașina cu masă mai mare are distanța de oprire mai mare

Reguli de traversare corectă (vezi fig. 6.3):

1. Oprește-te înainte de a traversa;
2. Asigură-te stânga-dreapta-stânga;
3. Traversează doar pe trecerea de pietoni;
4. Așteaptă oprirea vehiculelor;
5. Traversează în pas normal;
6. Nu folosi telefonul sau căștile;
7. Fii atent pe toată durata traversării.



Fig.6.3

Greșeli frecvente făcute de pietoni la traversare:

Greșelile frecvente care se fac de către pietoni pornesc de la *ignorarea inerției mașinii* (se ignoră faptul că o mașină are nevoie de timp și distanță pentru a se opri, mașina nu poate opri instantaneu), *necunoaștere sau ignorarea forțelor care intervin* în timpul deplasării unui vehicul (forța de frecare, forța centrifugă, forța centripetă).

Greșelile cel mai des întâlnite la trecerea străzii:

– neatenția în timpul traversării (folosirea telefonului sau a căștilor) (vezi fig. 6.4);

– traversare fără asigurare;

– intrarea bruscă pe trecerea de pietoni;

– presupunerea că șoferul oprește instantaneu (*nu poate fi ignorată inerția mașinii*);

– traversarea printre mașini (vizibilitate redusă – pietonul apare instantaneu în fața unei mașini).



Fig. 6.4

În activitatea cotidiană se întâlnesc din ce în ce mai mult situațiile în care pietonii trebuie să se deplaseze pe marginea unei șosele fără trotuare. *În acest caz, pietonul trebuie să meargă pe partea stânga a drumului și să poarte haine cât mai vizibile* (*vestă reflectorizantă*) (fig. 6.5).

Această regulă este necesară pentru ca:

– pietonul să vadă mașinile care vin din față;

– pietonul să poată reacționa mai repede și să se poate feri la nevoie;

– șoferii să poată observa pietonul cu ușurință.



Fig. 6.5

APLICĂ

Calculează distanța de oprire a unei mașini care rulează cu viteza de 90 km/h (25m/s) în diferite condiții de rulaj:

a) condiții optime de rulaj (șoferul nu este obosit și drumul este uscat), timpul de reacție este t_r = 1 s și accelerația de frânare este a_f = 8 m/s^2;

b) condiții dificile de rulaj (șoferul este obosit și se deplasează pe un drum umed, cu mâzgă), timpul de reacție este t_r = 2 s și accelerația de frânare este a_f = 5 m/s^2.

Indicație: Aplică formula 6.1.

Raza de viraj

Atunci când șoseaua urmează o porțiune curbată, autoturismul descrie o traiectorie sub forma unui arc de cerc. Raza acestui cerc, adică distanța dintre centrul curbei și traiectoria urmată de vehicul, se numește rază de viraj.

În timpul deplasării în curbă, vehiculul efectuează o mișcare circulară. În sistemul de referință legat de vehicul apare o forță centrifugă, care tinde să „împingă” automobilul spre exteriorul curbei, în sensul îndepărtării de centrul acesteia.

Forța de frecare statică (aderența) ($\vec{F}_{fs}$) se opune tendinței vehiculului de a derapa spre exteriorul curbei, contracarând efectul forței centrifuge (fig. 6.6).

Astfel, vehiculul se poate deplasa în siguranță pe șoseaua curbilinie doar dacă:

$$F_{fs} \geq F_{cf} \quad (6.4)$$

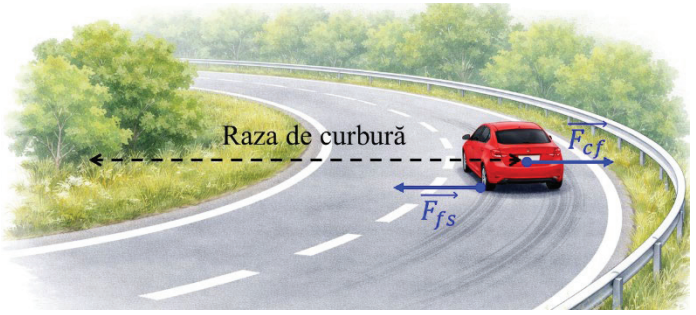


Fig. 6.6 (forțele sunt reprezentate în SR neinerțial legat de mașină)

La limită:

$$F_{fs} = F_{cf} \Rightarrow \mu_s mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \mu_s g = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s Rg} \quad (6.5)$$

Relația 6.5 arată că o *curbă cu raza de viraj mică trebuie parcursă în siguranță cu o viteză mică*.

De asemenea, aderența și, respectiv, valoarea coeficientului de frecare static (μ_s) sunt esențiale pentru stabilirea vitezei de deplasare în siguranță într-o curbă. În tabelul de mai jos poți observa scăderea coeficientului de frecare static (μ_s) de la drum uscat la drum umed și la drum cu gheață.

Relația 6.5 arată că viteza unui vehicul în curbă trebuie să fie mai mică pe măsură ce coeficientul de frecare static scade. Astfel, *pe drum umed sau drum cu gheață*, *viteza în curbă trebuie să fie mult mai mică decât viteza pe același drum uscat.*

Tip drum	μ_s	Observații
Drum uscat	0,7-0,9	aderență bună, frânare eficientă
Drum umed	0,6-0,4	aderență redusă, risc derapaj
Drum cu gheață	0,1-0,2	aderență foarte redusă, frânare dificilă

APLICĂ

Calculează vitezele maxime (teoretice) cu care o mașină parcurge în siguranță o curbă cu raza de 150 m pe un drum uscat ($\mu_{1s} = 0,8$) și pe un drum cu gheață ($\mu_{2s} = 0,15$) ($g = 10$ m/s^2).

Indicație: aplică relația 6.5.

Reține

Dacă este depășită viteza maximă cu care poate fi parcursă o curbă în siguranță, vehiculul iese din curbă alunecând spre exteriorul ei. În acest caz, apare **alunecarea dinamică**. Forța de frecare la alunecare (dinamică) este mai mică decât forța de frecare statică maximă (vezi forța de frecare statică și la alunecare din capitolul 3, *Principiile mecanicii newtoniene și aplicarea acestora*), astfel că, odată începută alunecarea laterală, în sensul creșterii razei de curbură, este foarte greu să fie oprită această mișcare, mai ales că odată cu creșterea razei de curbură crește și forța centrifugă (F_{cf}), care tinde să scoată mașina în exteriorul curbei. În aceste condiții, apăsarea bruscă pe frână este periculoasă pentru că mașina nu mai poate fi menținută sub control.

Soluția tehnică folosită la șosele și căi ferate pentru a compensa efectul forței centrifuge în curbe este supraînălțarea. Aceasta constă în ridicarea șoselei în partea exterioară a curbei față de cea interioară (vezi mișcarea circulară).

Atunci când un vehicul se deplasează cu viteză prea mare într-o curbă, forța centrifugă poate provoca deraparea sau chiar răsturnarea acestuia. Riscul de răsturnare crește dacă centrul de greutate al vehiculului este situat mai sus. În aceste condiții, chiar și la o înclinare mică a vehiculului, verticala dusă prin centrul de greutate poate ieși mai ușor în afara suprafeței de sprijin, ceea ce determină răsturnarea (fig. 6.7).



Fig. 6.7

Din acest motiv, vehiculele înalte, precum camioanele, autobuzele sau SUV-urile încărcate, sunt mai puțin stabile în curbe decât vehiculele joase.

Stabilitatea în viraj poate fi îmbunătățită prin reducerea vitezei, coborârea centrului de greutate și mărirea distanței dintre roți.

În trafic se pot întâmpla evenimente nedorite de producătorii de mașini sau de participanții la trafic. Majoritatea producătorilor de autoturisme testează comportarea acestora la impact și modul în care sunt protejați șoferul și pasagerii la ciocnirea cu un obstacol. În fig. 6.8 este prezentat un astfel de test la ciocnire.



Fig. 6.8

Siguranța rutieră este asigurată prin utilizarea sistemelor de protecție ale vehiculului și prin comportamentul responsabil al participanților la trafic.

Măsurile de siguranță la impact sunt realizate în conformitate cu legile fizicii.

Centura de siguranță împiedică manifestarea inerției pasagerilor. La oprirea bruscă a mașinii, în absența centurii, pasagerii continuă mișcarea din cauza inerției și se lovesc de geamul mașinii sau, în cazuri mai grave, sparg geamul și ies prin geam. Centura de siguranță menține pasagerii în contact cu mașina și nu au loc fenomenele descrise anterior.

Centura de siguranță micșorează la impact forța aplicată șoferului și pasagerilor prin creșterea timpului în care viteza pasagerilor scade la zero (fig. 6.9). În capitolul 3, *Principiile mecanicii newtoniene și aplicarea acestora*, ai învățat despre legătura dintre forță și variația impulsului.

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} \qquad (6.6)$$

Aria de sub curbele din fig. 6.9 reprezintă variația impulsului. Aceasta este aceeași în ambele cazuri pentru că are loc aceeași schimbare a vitezei de la aceeași valoare inițială la zero. Diferența apare la intervalul de timp în care se produce această variație: fără centură timp scurt și forță mare, cu centură timp lung și forță mică.

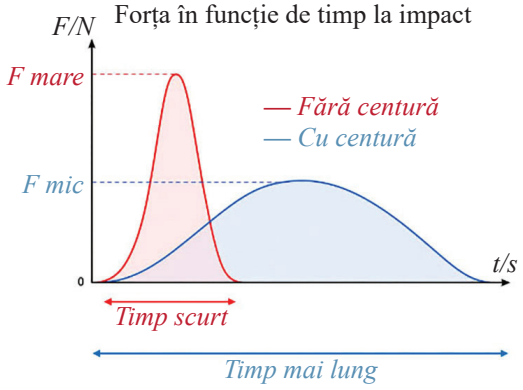


Fig. 6.9

Concluzie: *Centura de siguranță nu modifică variația impulsului, ci mărește timpul în care acesta are loc, reducând astfel forța maximă exercitată asupra corpului* (fig. 6.9).

Distanța de siguranță este spațiul dintre două vehicule aflate în mers, astfel încât șoferul din spate să poată opri în siguranță, fără să se ciocnească de vehiculul din față, atunci când acesta frânează brusc.

Din punct de vedere fizic, distanța de siguranță = distanța de reacție + distanța de frânare (relația 6.3). Practic, în mers, poți să îți dai seama dacă păstrezi distanța de siguranță față de vehiculul din față folosind regula celor 2 secunde (regulă prezentată de Titi Aur − specialist în siguranță rutieră). Această regulă se aplică astfel:

1. alegi un reper fix pe drum (un stâlp, un copac etc.);

2. când mașina din față trece prin dreptul reperului, începi să numeri ca să treacă 2 secunde. Numără în acest ritm: „1001, 1002”;

3. dacă ajungi la reperul ales înainte de a termina cele 2 secunde, ești prea aproape și trebuie să mărești distanța.

Observație: În condiții dificile, distanța în timp dintre cele două vehicule trebuie mărită: pe ploaie la 3-4 s, pe zăpadă/gheață la 5-6 s.

Autovehiculele sunt construite cu *zone deformabile* care absorb energia cinetică la impact și cu un interior rigid care protejează pasagerii. Stabilirea acestor zone și formele lor pentru o mai bună eficiență se face după efectuarea de teste la ciocnire (fig. 6,8). În fig. 6,10 este prezentată caroseria unui autovehicul la care partea verde este construită să preia energia cinetică a impactului, iar zona albastră este rigidă și asigură siguranța persoanelor din interiorul autovehiculului.



Fig. 6.10

Alte dispozitive care cresc siguranța pentru pasagerii din interiorul unei mașini:
– *airbagul* – protejează la impactul frontal împreună cu centura de siguranță;
– *tetiera* – care protejează capul și gâtul pasagerului în cazul unei ciocniri din spate;
– folosirea de *anvelope corespunzătoare* (iarna, vara) care asigură o mai bună aderență la drum;
– folosirea de *frâne eficiente*;
– folosirea de *faruri și lumini de semnalizare adecvate* – cresc vizibilitatea.

APLICĂ

1. Un autoturism și un camion se deplasează pe o sosea rectilinie în același sens. Autoturismul are viteza $v_1 = 2\vec{v}$, iar camionul $\vec{v}_2 = \vec{v}$ (fig. 6.11). Din față, pe banda opusă, vine un autocar cu viteza $\vec{v}_3 = -\vec{v}$. La un moment dat (considerat moment inițial), autoturismul începe depășirea camionului. În acest moment, distanța dintre autoturism și camion este d. Pentru ca depășirea să se realizeze în siguranță, autoturismul trebuie să fie la distanța d în fața camionului în momentul în care autocarul trece pe lângă el, după depășire. Se neglijează dimensiunile vehiculelor. Calculează:

a) distanța minimă D care trebuie asigurată între autoturism și autocar pentru ca depășirea să se efectueze în siguranță;

b) timpul necesar depășirii;

c) distanțele parcurse de cele trei vehicule în timpul manevrei de depășire.



Fig. 6.11

Rezolvare:

În fig. 6.12 sunt reprezentate vitezele celor trei vehicule față de pământ. **a.** Problema se rezolvă ușor în sistemul de referință legat de camion (fig. 6.13). În acest sistem, *camionul este fix,* autoturismul are viteza $\vec{v}_{12}$ față de camion, iar autocarul are viteza $\vec{v}_{32}$ față de camion.



Fig. 6.12

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2 \Rightarrow v_1 = v_{12} + v_2 \Rightarrow v_{12} = v_1 - v_2 = v$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_{32} + \vec{v}_2 \Rightarrow -v_3 = v_{32} + v_2 \Rightarrow v_{32} = -v_2 - v_3 \Rightarrow |v_{32}| = |-v_3 - v_2| = 2v$$

În timpul t, autoturismul parcurge distanța $2d$, iar autocarul d_3.

$$2d = v \cdot t \text{ și } d_3 = 2v \cdot t \Rightarrow d_3 = 4d$$

Conform figurii 6.13: $D = 2d + d_3 = 6d$

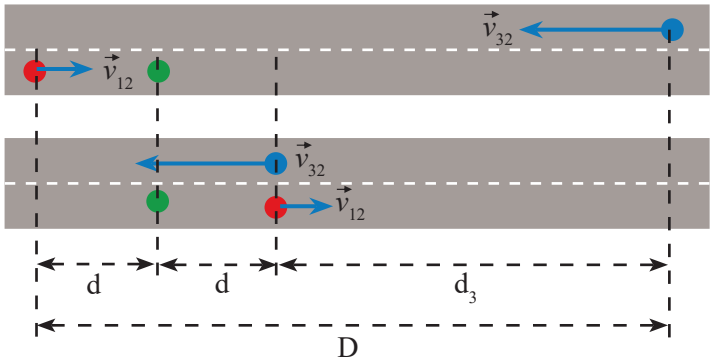


Fig. 6.13 – vitezele și deplasările față de camion

b. $2d = v_{12} \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{2d}{v}$

c. Deplasările vehiculelor față de pământ sunt reprezentate în fig. 6.14:

$$x_1 = v_1 \cdot t = 2v \cdot \frac{2d}{v} \Rightarrow x_1 = 4d \; ; \; x_2 = v_2 \cdot t = v \cdot \frac{2d}{v} \Rightarrow x_2 = 2d \; ; \; x_3 = v_3 \cdot t = v \cdot \frac{2d}{v} \Rightarrow x_3 = 2d$$

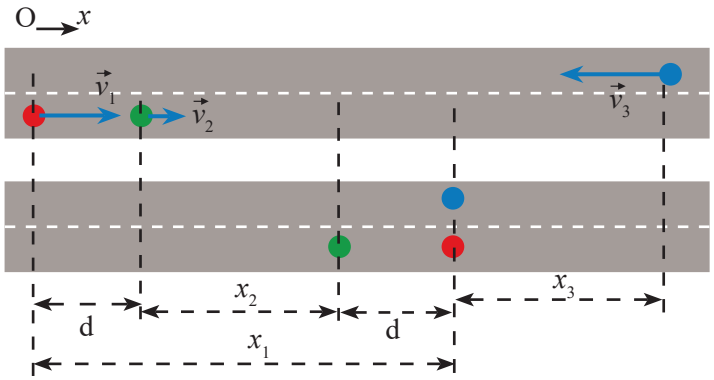


Fig. 6.14 – deplasările față de pământ

EXERSEAZĂ

1. Un autoturism pornește de pe loc și se deplasează uniform accelerat, fără viteză inițială, parcurgând astfel distanța d_1 = 100 m. În continuare, autoturismul se deplasează cu viteză constantă. După un interval de timp t_2 = 11 s, în fața autoturismului apare o căprioară. Se cunosc: timpul de reacție al șoferului: t_r = 1 s; distanța de frânare: d_f = 40 m; timpul total de mișcare, de la pornire până la oprire: T = 26 s. Calculează:

a) accelerația autoturismului la pornire (a_1) și accelerația în timpul frânării (a_f);

b) distanța dintre autoturism și căprioară în momentul apariției acesteia pe șosea, știind că autoturismul s-a oprit exact în locul în care a apărut căprioara.

2. Un tren se deplasează cu viteza constantă v = 72 km/h pe o cale ferată orizontală și intră, la un moment dat, într-o curbă de rază R. Un elev suspendă un corp de un dinamometru și observă că, în timpul parcurgerii curbei, dinamometrul se înclină ușor (fig. 6.15) și indică o valoare cu 10% mai mare decât în timpul deplasării rectilinii.

a) Determină raza curbei.

b) Pe masa din vagon se află un pahar cu apă. Determină valoarea minimă a coeficientului de frecare static dintre pahar și masă pentru ca paharul să nu alunece în timpul deplasării în curbă.



Fig. 6.15

TEST DE EVALUARE

Se acordă 1 punct din oficiu.

1. Identifică afirmația greșită și notează litera corespunzătoare în caiet. **(0,5 p)**

a. Distanța de reacție depinde, în principal, de viteza mașinii și timpul de reacție.

b. Dacă viteza se dublează, distanța de frânare se dublează.

c. Centura de siguranță purtată de șofer reduce forța impactului fără să modifice variația impulsului șoferului.

d. Coeficientul de frecare static dintre șosea și cauciucuri este mai mic pe șoseaua umedă decât pe șoseaua uscată.

2. Scrie în caiet literele afirmațiilor de mai jos și indică pentru fiecare dacă este adevărată (**A**) sau falsă (**F**). **(0,5 p)**

a. Pe un drum cu rază de curbură mică, viteza de siguranță a unui autovehicul este mai mare decât pe un drum cu raza de curbură mare.

b. Vehiculele înalte sunt mai instabile decât cele joase.

c. Distanța de reacție crește odată cu viteza.

d. Energia cinetică este direct proporțională cu masa vehiculului.

3. Prezintă pe scurt: **(1 p)**

a. factorii care influențează distanța de oprire;

b. cum este influențată stabilitatea unui vehicul de înălțimea la care se află centrul de greutate.

4. Explică de ce viteza în curbele strânse (cu rază mică) trebuie să fie mai mică decât în curbele largi (cu rază mare). **(0,5 p)**

5. Explică în ce constă regula celor 2 secunde pentru vehiculele care sunt în trafic și cum se aplică ea. **(0,5 p)**

6. Enumeră trei dispozitive din construcția mașinii care contribuie la creșterea siguranței pasagerilor. **(1 p)**

7. Un autoturism se deplasează cu viteza de 90 km/h și timpul de reacție al șoferul este de 1,5 s. Calculează distanța parcursă de autoturism în timpul necesar șoferului ca să reacționeze. **(1 p)**

8. Un autoturism se deplasează pe o șosea rectilinie cu viteza $v_0 = 72$ km/h. Șoferul observă un obstacol și reacționează după timpul $t_r = 1$. După acest interval, automobilul frânează uniform cu accelerația $a_f = 5$ m/s^2 până la oprire. Calculează distanța totală de oprire a autoturismului. **(1 p)**

9. Un autoturism se deplasează cu viteza $v = 54$ km/h, într-o curbă circulară de rază $R = 45$ km. Centrul de greutate al automobilului se află la înălțimea $h = 0{,}8$ m față de șosea, iar distanța dintre roțile din stânga și cele din dreapta este $d = 1{,}6$ m. Calculează: **(3 p)**

a) accelerația centripetă a autoturismului;

b) forța centrifugă care acționează asupra unui pasager cu masa $m = 70$ kg;

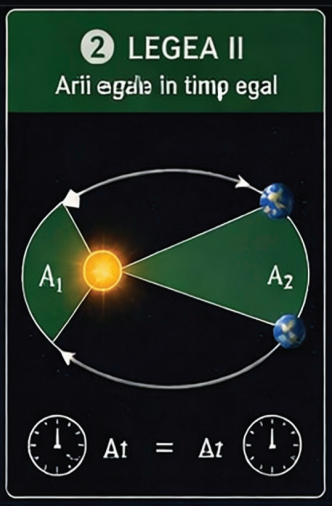
c) viteza minimă pe care ar trebui să o aibă vehiculul pentru ca să se răstoarne în curbă.

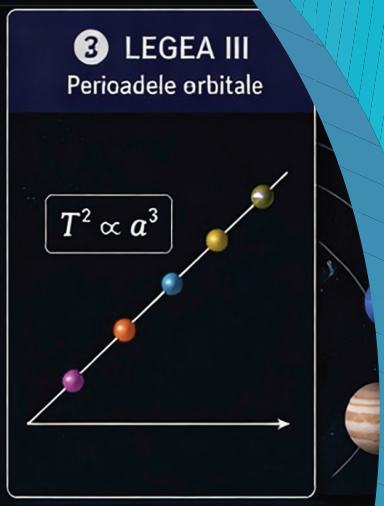


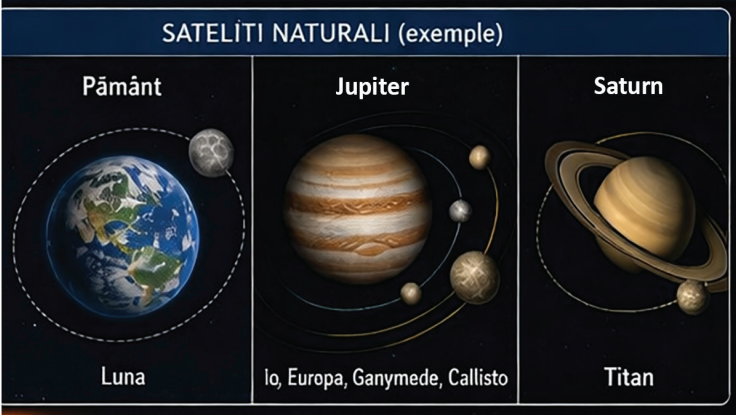
Johannes Kepler
1571 - 1630

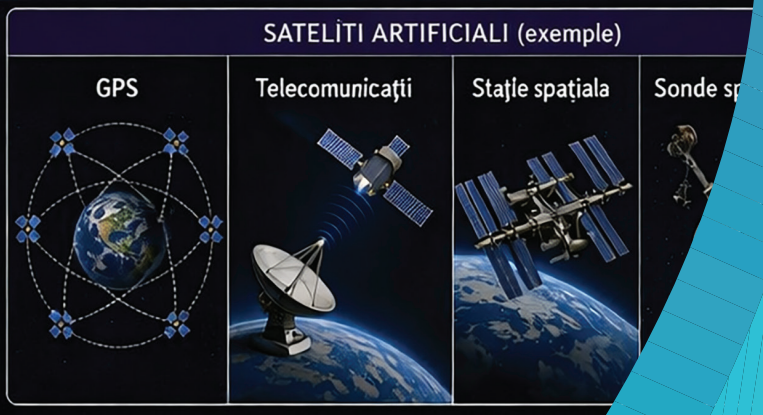
Tycho Brahe
1546 - 1601













La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să înțelegi și să explici noțiuni precum orbită eliptică, focar, perioadă de revoluție, excentricitate, moment cinetic, legile lui Kepler;
- să compari mișcarea diferitelor planete;
- să descrii cum variază viteza unei planete sau a unui satelit pe o orbită eliptică;
- să interpretezi grafic Legea a II-a a lui Kepler;
- să explici rolul forței de atracție gravitațională în mișcarea corpurilor cerești;
- să stabilești conexiuni între observațiile astronomice și modelele matematice;
- să apreciezi importanța observațiilor și a datelor experimentale în știință;
- să aplici relațiile matematice și legile studiate în rezolvarea problemelor de mișcare a corpurilor cerești;
- să lucrezi colaborativ în soluționarea unor probleme legate de protejarea mediului (deșeuri spațiale).

Capitolul 7

Elemente de mecanică cerească (opțional)

7.1. Legile lui Kepler

Omenirea și-a pus întrebări referitoare la mișcarea astrelor pe cer încă din cele mai vechi timpuri. În Antichitate și în Evul Mediu, ideile despre mișcarea planetelor erau dominate mai degrabă de modele filozofice și geometrice decât de legi fizice bazate pe observații experimentale. Cel mai cunoscut model al Universului în aceste perioade a fost cel geocentric, descris de Aristotel și dezvoltat matematic de Claudius Ptolemaeus. Conform acestui model, planetele, Soarele și stelele se roteau în jurul Pământului aflat în centrul Universului.

În secolul al XVI-lea, Nicolaus Copernicus a propus o idee revoluționară: Soarele se află în centrul Sistemului Solar, iar planetele, inclusiv Pământul, se rotesc în jurul acestuia pe traiectorii circulare.

Pe baza observațiilor de mare precizie realizate de Tycho Brahe (1546-1601), după aproape două decenii de calcule, Johannes Kepler (1571-1630) a rupt tradiția cercurilor perfecte și a formulat cele trei legi ale mișcării planetelor în jurul Soarelui. Aceste legi au deschis drumul către descoperirea legii gravitației universale.

În această lecție vei studia cele trei legi enunțate de Kepler și vei descoperi regularitățile ce apar în descrierea matematica a mișcării planetelor.

Astronomul danez Tycho Brahe a realizat observații astronomice foarte precise asupra mișcării planetelor și a întocmit tabele cu datele obținute. Pe baza acestor date, Kepler a enunțat următoarele trei legi ale mișcării planetelor în jurul Soarelui:

I. Legea orbitelor: Planetele se mișcă în jurul Soarelui pe traiectorii **eliptice**, Soarele aflându-se într-unul dintre **focarele** elipsei (fig. 7.1.1).

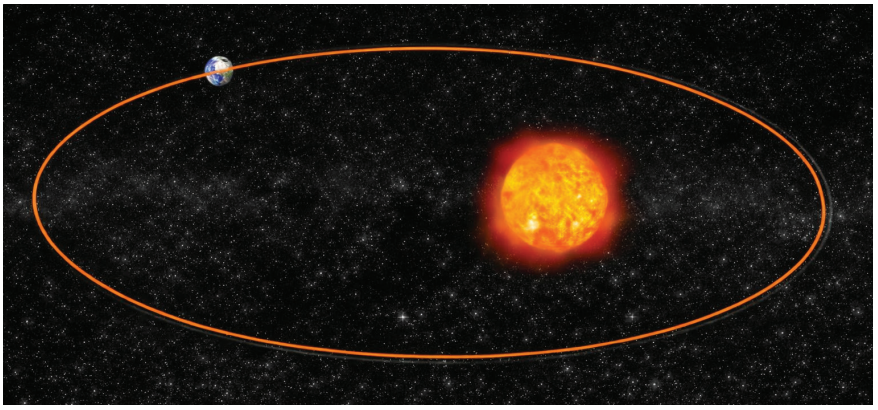


Fig. 7.1.1.

II. Legea ariilor: Razele vectoare duse de la Soare la planetă **mătură arii egale în intervale de timp egale** (fig. 7.1.2).

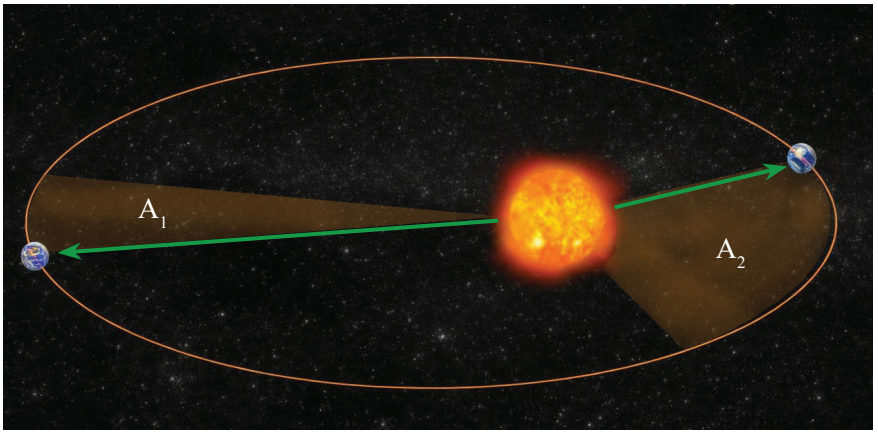


Fig. 7.1.2

Ariile A_1, respectiv, A_2, descrise de raza vectoare Soare-planetă în același interval de timp Δt, sunt egale.

III. Legea perioadelor: Pătratul perioadei de revoluție a unei planete în jurul Soarelui este proporțional cu **cubul semiaxei** mari a elipsei[1] (orbitei sale):

$$T^2 \sim a^3$$

Legile lui Kepler sunt legi empirice, deduse din observații astronomice. Aceste legi au fost formulate înaintea apariției principiilor dinamicii. Kepler a încercat să explice cele trei legi folosind doar metode geometrice, însă nu a reușit să le explice complet. Mult mai târziu, Isaac Newton a demonstrat aceste legi pe baza principiilor dinamicii.

Pentru a demonstra Legile lui Kepler și pentru a descrie mișcarea planetelor în jurul Soarelui, trebuie să introducem, pe lângă momentul forței, încă o mărime fizică ce caracterizează mișcarea de rotație. Această mărime fizică se **numește moment cinetic (sau momentul impulsului)**.

Reține

Momentul cinetic al unui punct material în raport cu un pol (punct) este o mărime fizică vectorială definită ca fiind **produsul vectorial** dintre vectorul de poziție și vectorul impuls ale punctului material:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (7.1.1)$$

În fig. 7.1.3 am reprezentat, pentru un punct material de masă m ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$, vectorul de poziție $\vec{r}$ față de reperul O, vectorul impuls $\vec{p}$ și, respectiv, vectorul moment cinetic $\vec{L}$.

Reține

Vectorul moment cinetic **este perpendicular** pe planul determinat de vectorul de poziție și vectorul impuls și are sensul dat de sensul de înaintare al burghiului drept, care rotește vectorul de poziție peste vectorul impuls pe drumul cel mai scurt. Modulul vectorului moment cinetic este:

$$\left.\begin{aligned} L &= r \cdot p \cdot \sin\alpha \\ p &= m \cdot v \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin\alpha \qquad (7.1.2),$$

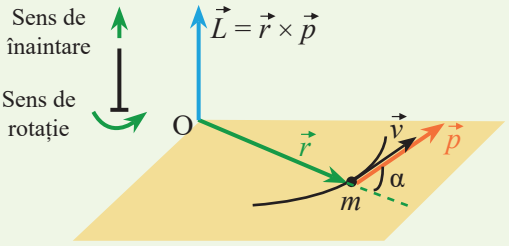


Fig. 7.1.3

unde α este unghiul dintre vectorul de poziție și vectorul impuls (fig. 7.1.3). Modulul vectorului moment cinetic este numeric egal cu aria paralelogramului determinat de vectorul de poziție și vectorul impuls (fig. 7.1.4).

Intuitiv, momentul cinetic exprimă cât de „puternică" este mișcarea de rotație: el crește dacă obiectul se deplasează mai rapid sau dacă se află mai departe de punctul față de care se consideră rotația.

Unitatea de măsură pentru momentul cinetic este:

$$[L]_{SI} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \text{J} \cdot \text{s}$$

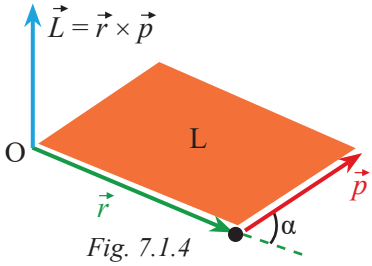


Fig. 7.1.4

PENTRU CURIOȘI:

Pentru a calcula **variația momentului cinetic** în timp, să presupunem că la momentul de timp t mobilul de masă m are, față de polul O, vectorul de poziție $\vec{r}$, viteza $\vec{v}$ și impulsul $\vec{p}$ (fig. 7.1.4.). După un interval de timp Δt, față de același pol, mobilul va avea vectorul de poziție $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$, viteza $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ și impulsul $\vec{p}' = \vec{p} + \Delta\vec{p}$. Momentul cinetic al punctului material la momentul de timp $t + \Delta t$ este:

$$\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta\vec{p})$$

[1] **Elipsa** este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor până la două puncte fixe, numite focare, este constantă.

Calculăm variația momentului cinetic:

$$\left.\begin{aligned}\vec{L}' &= (\vec{r}+\Delta\vec{r})\times(\vec{p}+\Delta\vec{p})\\ \vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p}\\ \Delta\vec{L} &= \vec{L}'-\vec{L}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{L} = (\vec{r}+\Delta\vec{r})\times(\vec{p}+\Delta\vec{p}) - \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times\vec{p}+\vec{r}\times\Delta\vec{p}+\Delta\vec{r}\times\vec{p}+\Delta\vec{r}\times\Delta\vec{p}-\vec{r}\times\vec{p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{L} = \vec{r}\times\Delta\vec{p}+\Delta\vec{r}\times\vec{p}+\Delta\vec{r}\times\Delta\vec{p}$$

Variația momentului cinetic raportată la intervalul de timp Δt este:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{r}\times\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\times\vec{p}+\Delta\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad (7.1.3)$$

Calcularea **variației instantanee** a momentului cinetic în timp presupune ca intervalul de timp Δt **să fie infinitezimal (să tindă către zero).**

În acest caz, variațiile poziției și impulsului vor fi și ele, la rândul lor, infinit de mici, ceea ce face ca termenul $\Delta\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ să poată fi neglijat. Dacă intervalul de timp Δt **tinde către zero,** variația vectorului de poziție în timp devine **viteză instantanee**, iar variația impulsului în timp reprezintă **forța rezultantă**.

În aceste condiții, relația 7. 1.3 devine:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{r}\times\vec{F}+\vec{v}\times\vec{p}$$

Cum **Δt tinde către zero**, folosim notația $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\delta\vec{L}}{\delta t}$, unde $\delta\vec{L}$ și δt sunt variații infinitezimale ale mărimilor fizice respective.

Deci relația 7.1.3 poate fi scrisă și sub forma:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = \vec{r}\times\vec{F}+\vec{v}\times\vec{p}\\ &\text{Dar } \left|\vec{v}\times\vec{p}\right| = v\cdot p\cdot\sin 0 = 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad (7.1.4)$$

Știm că momentul forței este:

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad (7.1.5)$$

Înlocuind relația 7.1.5 în relația 7.1.4, obținem **teorema de variație a momentului cinetic pentru punctul material:**

$$\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = \vec{M} \qquad (7.1.6)$$

Reține

Variația momentului cinetic în timp față de un reper este egală cu **momentul forței rezultante** aplicate punctului material în raport cu acel reper.

Din relația 7.1.6 se observă că **dacă momentul forței față de un pol** (reper) este zero, momentul cinetic al punctului material față de acel pol **se conservă** (este constant în timp):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = \vec{M}\\ &\vec{M} = \vec{0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \delta\vec{L} = \vec{0}\Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

În cazul particular al mișcării planetelor pe traiectorii eliptice în jurul Soarelui, forța gravitațională dintre Soare și planetă este o forță centrală, adică direcția ei trece în permanență prin centrul Soarelui, așa cum este ilustrat în fig. 7.1.5. Forțele reprezentate pentru două poziții oarecare ale unei planete aflate în mișcare pe traiectorie eliptică în jurul Soarelui sunt orientate spre centrul Soarelui. Momentul forței gravitaționale în raport cu Soarele este nul, de aceea momentul cinetic al planetei, în raport cu Soarele, se conservă (este constant în timp):

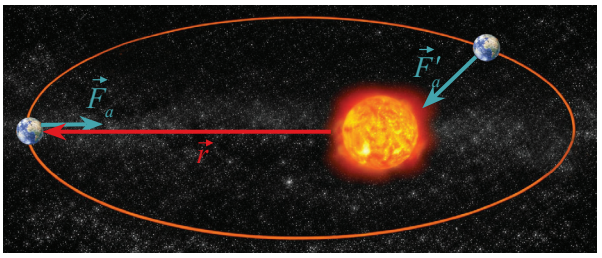


Fig. 7.1.5

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M = r \cdot F \cdot \sin\pi \\ \sin\pi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{M} = \vec{0} \\ \vec{M} = \dfrac{\delta \vec{L}}{\delta t} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Acest rezultat conduce la Legea a II-a a lui Kepler: într-un interval foarte mic de timp, planeta se deplasează puțin, raza vectoare $\vec{r}$ mătură un triunghi foarte îngust. Aria acestui triunghi depinde de distanța până la Soare și de cât de repede se mișcă planeta (fig. 7.1.6):

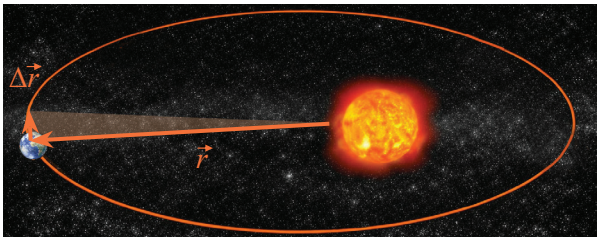


Fig. 7.1.6

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{r} \times \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| \\ \vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{\vec{p}}{m}\right| = \frac{L}{2m}$$

Cum momentul cinetic se conservă, rezultă că raza **vectoare dusă de la Soare la planetă mătură arii egale în intervale de timp egale.**

Pentru a demonstra Legea a III-a a lui Kepler putem considera cazul particular al unei orbite circulare. Pentru o planetă de masă *m*, care se rotește în jurul Soarelui de masă *M*, forța gravitațională acționează ca forță centripetă, determinând mișcarea circulară. Aplicând principiul al II-lea al dinamicii pentru mișcarea circulară, obținem:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot \vec{a}_{cp} = \vec{F}_a \Rightarrow m \cdot a_{cp} = F_a \\ a_{cp} = \omega^2 \cdot r \\ F_a = K\dfrac{m \cdot M}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot \omega^2 \cdot r = K\frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow \omega^2 \cdot r = K\frac{M}{r^2} \qquad (7.1.7)$$

Viteza unghiulară poate fi exprimată în funcție de perioada de rotație a planetei în jurul Soarelui, **numită perioadă de revoluție**:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (7.1.8)$$

Înlocuind această relație în relația 7.1.7, obținem:

$$\left.\begin{array}{l} \omega^2 \cdot r = K\dfrac{M}{r^2} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = K\frac{M}{r^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{K \cdot M} r^3 \Rightarrow T^2 \sim r^3$$

Această relație este **valabilă pentru orice elipsă a cărei semiaxă mare este *a***:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K \cdot M} a^3 \Rightarrow T^2 \sim a^3$$

Reține

Conform Legii a III-a a lui Kepler, toate **corpurile ale căror traiectorii sunt elipse cu aceeași semiaxă mare *a*,** inclusiv cercul de rază $r = a$, **au aceeași perioadă de rotație *T*.**

APLICĂ

1. Unitatea astronomică (*UA*) este o unitate de măsură a distanțelor folosită în astronomie, în special pentru Sistemul Solar. Ea se definește ca fiind **distanța medie dintre Pământ și Soare,** adică semiaxa mare a traiectoriei eliptice a Pământului în jurul Soarelui. Unitatea astronomică oferă o scară naturală pentru a descrie structura Sistemului Solar într-un mod intuitiv. O planetă se rotește în jurul Soarelui pe o orbită eliptică având semiaxa mare egală cu $4UA$. Știind că perioada de revoluție a Pământul în jurul Soarelui este de 1 an, calculează:

a. perioada de revoluție a planetei;

b. de câte ori este mai mare anul pe această planetă față de anul terestru.

Rezolvare:

a. Aplicând Legea a III-a a lui Kepler pentru cele două planete, obținem:

$$\frac{T_{pl}^{\ 2}}{T_P^{\ 2}} = \frac{a_{pl}^3}{a_P^3} \Rightarrow T_{pl}^{\ 2} = T_P^{\ 2} \frac{a_{pl}^3}{a_P^3} \Rightarrow T_{pl} = T_P \sqrt{\left(\frac{a_{pl}}{a_P}\right)^3}.$$

(Am notat a_{pl} și a_P semiaxele mari ale traiectoriilor eliptice a planetei, respectiv a Pământului în jurul Soarelui).

Înlocuind valorile numerice, obținem:

$$T_{pl} = T_P \sqrt{\left(\frac{a_{pl}}{a_P}\right)^3} = 1\text{ an} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{1}\right)^3} = 8\text{ ani}.$$

b. $\frac{T_{pl}}{T_P} = \frac{8\text{ ani}}{1\text{ an}} = 8.$

2. Ceres, considerată planetă pitică, se mișcă în jurul Soarelui pe o orbită eliptică. Distanța minimă față de Soare (periheliu) este de $2{,}55UA$, iar distanța maximă (afeliu) este de $3UA$. Viteza planetei la periheliu este $v = 20$ km/s. Știind că perioada de revoluție a Pământului în jurul Soarelui este de 1 an, calculează:

a. semiaxa mare a orbitei planetei;

b. perioada de revoluție a planetei în jurul Soarelui;

c. viteza planetei la afeliu.

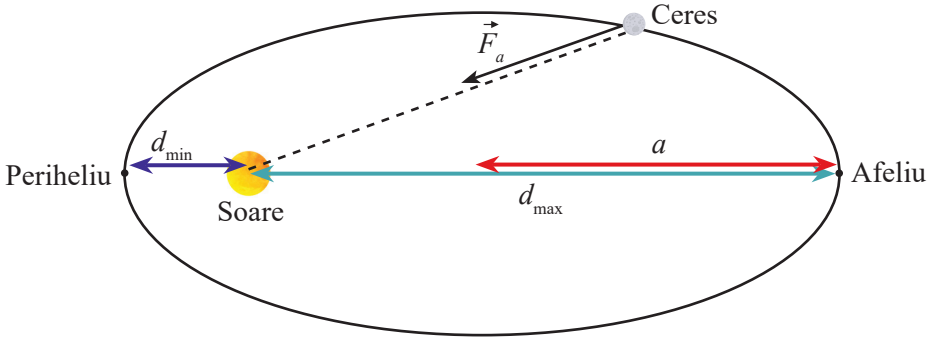


Fig. 7.1.7

Rezolvare:

a. Din fig. 7.1.7 se observă că:

$$d_{\min n} + d_{\max} = 2a \Rightarrow a = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2} = \frac{2,55+3}{2} = 2,77UA$$

b. Aplicând Legea a III-a a lui Kepler pentru Ceres și Pământ:

$$\frac{T_C^{\,2}}{T_P^{\,2}} = \frac{a^3}{a_P^3} \Rightarrow T_C^{\,2} = T_P^{\,2}\frac{a^3}{a_P^3} \Rightarrow T_C = T_P\sqrt{\left(\frac{a}{a_P}\right)^3}.$$

Înlocuind valorile numerice, obținem:

$$T_C = T_P\sqrt{\left(\frac{a}{a_P}\right)^3} = 1\text{ an}\cdot\sqrt{\left(\frac{2,77}{1}\right)^3} \cong 4,62\text{ ani.}$$

c. Forța gravitațională determină mișcarea lui Ceres în jurul Soarelui. Această forță este de tip central (fig. 7.1.7):

$$\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Cum momentul cinetic al planetei se conservă, putem scrie pentru periheliu și afeliu:

$$m\cdot v_p \cdot d_{\min}\cdot\sin 90^\circ = m\cdot v_a\cdot d_{\max}\cdot\sin 90^\circ \Rightarrow v_a = \frac{v_p\cdot d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{20\cdot 2,55}{3}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 17\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Deci cu cât planeta este mai depărtată de Soare, cu atât viteza ei este mai mică.

3. O stea cu masa egală cu cea a Soarelui are o planetă care orbitează la distanța de 1 UA. Planeta are masa egală cu 2 mase terestre. Calculează care este perioada de revoluție a planetei în jurul stelei. Cunoști perioada de revoluție a Pământului în jurul Soarelui, $T = 1$ an.

Rezolvare:

Conform Legii a III-a a lui Kepler, perioada de revoluție a unei planete în jurul unei stele depinde de masa stelei și de distanța dintre planetă și stea, dar nu depinde de masa planetei.

Cum steaua are aceeași masă ca Soarele, iar planeta se află la aceeași distanță ca Pământul, adică 1 UA, planeta va avea aceeași perioadă de revoluție ca Pământul.

Prin urmare, perioada de revoluție a planetei este de 1 an.

4. Folosind Legea a III-a a lui Kepler și principiul fundamental al mecanicii, demonstrează că forța de interacțiune dintre un astru și un satelit al său aflat în mișcare circulară uniformă este invers proporțională cu pătratul distanței dintre centrele celor două corpuri cerești (acest raționament a fost făcut de Newton în 1665 pentru sistemul Pământ și Lună, înainte să enunțe Legea atracției universale).

Rezolvare:

$$\left.\begin{aligned} F &= m\cdot a_n \\ a_n &== \frac{m\cdot v^2}{r} \\ v &= \frac{2\pi\cdot r}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = \frac{m}{r}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2\cdot m\cdot r}{T^2}.$$

Conform Legii a III-a a lui Kepler: $\frac{T^2}{r^3} = \text{const.}$ Înlocuind această relație în relația 7.1.8, obținem:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2} \\ \frac{T^2}{r^3} &= \text{const.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F \sim \frac{1}{r^2}.$$

EXERSEAZĂ

1. Elipsa este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor până la două puncte fixe, numite focare, este constantă. Desenează pe foaia de hârtie o elipsă, folosindu-te de două ace, un creion și o bucată de sfoară.

2. O planetă are perioada de revoluție în jurul Soarelui T = 125 ani. Calculează semiaxa mare a orbitei planetei. Știi perioada de revoluție a Pământului T_1 = 1 an și semiaxa mare a orbitei sale, a_1 = 1 UA.

3. Cometa Halley are o perioadă orbitală de 76 ani și ajunge la afeliu la o distanță de 35,3 UA față de Soare. Cât de aproape ajunge cometa față de Soare la periheliu?

4. Calculează raportul dintre viteza planetei pitice Pluto la periheliu și viteza sa la afeliu. Cunoști semiaxa mare a lui Pluto și distanța minimă dintre Pluto și Soare.

5. O planetă se deplasează pe o orbită eliptică în jurul Soarelui. Intervalul de timp în care planeta parcurge porțiunea de orbită dintre periheliu și un punct oarecare P reprezintă 1/3 din perioada sa orbitală. Care este raportul dintre aria măturată de raza vectoare pe această porțiune și aria totală a elipsei?

6. **Excentricitatea** unei elipse este o mărime care arată cât de „alungită" este elipsa respectivă și se definește prin relația: $e = c/a$, unde c este distanța de la centrul elipsei la unul dintre focare, iar a este semiaxa mare a elipsei. Exprimă excentricitatea în funcție de distanța minimă, respectiv distanța maximă la care se poate afla planeta față de Soare.

7. Calculează **excentricitatea** planetei pitice Ceres folosind datele numerice din problema rezolvată 2.

8. Stelele neutronice (fig. 7.1.8) sunt, după găurile negre, printre cele mai dense obiecte compacte din univers. O stea neutronică a cărei masă este comparabilă cu masa Soarelui poate avea raza de doar aproximativ 12 km. O navă spațială orbitează în jurul unei astfel de stele neutronice, la distanța r = 40600 km față de centrul stelei. Perioada de rotație a stelei în jurul axei sale este T = 0,1288 s, iar perioada orbitală T_N a navei este de 1000 de ori mai mare decât perioada de rotație a stelei. Calculează:

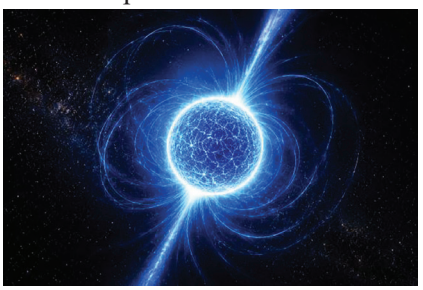


Fig. 7.1.8

a. masa stelei;
b. accelerația gravitațională produsă de stea în dreptul navei;
c. viteza unghiulară a navei.

Cunoști valoarea constantei atracției universale $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

9. În 2005 s-a descoperit o planetă extrasolară care orbitează o stea pitică brună din constelația Hidra, aflată la 230 ani-lumină de Pământ. Masa planetei este de 5 ori mai mare decât masa planetei Jupiter. Considerând că planeta are densitate egală cu densitatea planetei Jupiter, (ρ_J = 1,33 g/cm³) și cunoscând raza planetei Jupiter, R_J = 71 490 km, precum și valoarea constantei atracției universale $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg², calculează:

a. lungimea unui an lumină (a.l.) în metri;
b. masa planetei;
c. valoarea accelerației gravitaționale la suprafața planetei.

10. Răspunde cu adevărat sau fals la următoarele afirmații:

a. Legea I a lui Kepler firmă că planetele se mișcă în jurul Soarelui pe traiectorii eliptice.

b. Conform legii a III-a a lui Kepler, toate corpurile ale căror traiectorii sunt elipse cu aceeași semiaxă mare a, inclusiv cercul de rază $r = a$, au aceeași viteză unghiulară.

c. Legile lui Kepler au fost demonstrate de Tycho Brahe.

d. Unitatea astronomică este distanța medie dintre Pământ și Lună.

7.2. Mişcarea planetelor şi a sateliţilor

Planetele se mișcă pe traiectorii eliptice în jurul stelelor. Luna se rotește în jurul Pământului. Deși pare singurul „însoțitor" al planetei noastre, în realitate, Pământul este înconjurat de o rețea invizibilă de sateliți artificiali care susțin comunicațiile, navigația prin GPS și cercetarea științifică. Cum reușesc aceste obiecte să rămână pe orbită? Ce rol joacă forța de atracție gravitațională în mișcarea lor? Cu ce viteză trebuie lansat de pe Pământ un obiect astfel încât să devină satelit artificial? La aceste întrebări vom răspunde în această lecție.

Astronomii au observat încă din Antichitate că, deși majoritatea aștrilor nu-și schimbă pozițiile unii față de alții, există unele corpuri cerești care „rătăcesc" printre stelele fixe. Ei au numit aceste corpuri cerești planete. Planetele nu emit lumină proprie și se mișcă în jurul stelelor sub acțiunea forței de atracție gravitațională exercitate de acestea.

Reține

Viteza orbitală este viteza cu care un corp ceresc se mișcă în jurul unui alt corp ceresc mai masiv, sub acțiunea forței de atracție gravitațională.

În Sistemul Solar, planetele se mișcă pe traiectorii eliptice (Legea I a lui Kepler), iar viteza lor orbitală nu este constantă pe traiectorie. Viteza orbitală este mai mare la periheliu, când planeta este aproape de Soare, și mai mică la afeliu, când este mai departe de Soare (fig. 7.2.1).

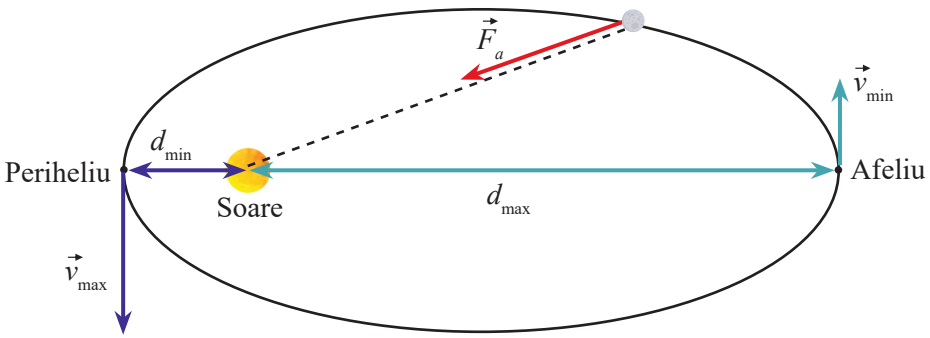


Fig. 7.2.1

Exista planete în Sistemul Solar care au traiectorii aproape circulare: Venus, Pământ și Neptun. Viteza orbitală a acestor planete este **aproape constantă** pe traiectorie.

Să considerăm un corp ceresc de masă m care se deplasează pe o orbită circulară în jurul unui alt corp ceresc, de masă M ($M \gg m$). Cele două corpuri pot fi considerate punctiforme în raport cu distanța dintre ele.

Într-un sistem de referință inerțial legat de corpul de masă M (considerat în repaus), corpul de masă m se află în mișcare circulară uniformă, având accelerația orientată spre centrul traiectoriei. Această accelerație este produsă de forța de atracție gravitațională exercitată de corpul de masă M (fig. 7.2.1).

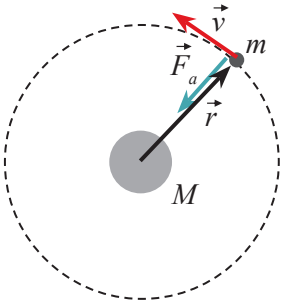


Fig. 7.2.2

Pentru a calcula **viteza orbitală** a corpului m aplicăm principiul fundamental al mecanicii pentru acest corp:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_a$$

Rescriind relația scalar și ținând cont de expresia matematică a accelerației normale și a forței de atracție, obținem:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot a_n &= F_a \\ a_n &= \frac{v^2}{r} \\ F_a &= K\frac{m \cdot M}{r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = K\frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow v^2 = K\frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{K\frac{M}{r}} \qquad (7.2.1)$$

Se observă că viteza orbitală **scade** pe măsură ce distanța față de corpul ceresc orbitat **crește**. Acest lucru este valabil și pentru planetele din Sistemul Solar: Venus se deplasează cu o viteză orbitală aproape constantă, $v = 35,\ 02$ km/s, în timp ce planeta Neptun, cea mai îndepărtată de Soare, este mult mai lentă ($v_N = 5,43$ km/s). Viteza **medie orbitală a Pământului** este:

$$v_P = \sqrt{K\frac{M_S}{d_{P-S}}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{1496 \cdot 10^{8}}}\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \cong 29,8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Tot sub acțiunea forței de atracție gravitațională, sateliții se rotesc în jurul planetelor.

Reține

Un **satelit** este un corp ceresc, **natural sau artificial**, care se deplasează pe orbită în jurul unei planete sau a altui corp ceresc, sub **acțiunea forței gravitaționale**.

Există două tipuri de sateliți:
a) sateliți **naturali**
b) sateliți **artificiali**

Sateliții naturali sunt corpuri cerești care orbitează în mod natural o planetă. De exemplu, Luna este satelitul natural al Pământului; Phobos și Deimos sunt sateliții naturali ai planetei Marte; Io, Europa, Calisto și Ganymede sunt sateliți ai planetei Jupiter. Saturn are mai mult de 140 de sateliți naturali confirmați, cei mai cunoscuți fiind Titan, Enceladus și Rhea.

În fig. 7.2.3 se poate observa **Titan**, cel mai mare satelit care orbitează planeta **Saturn**. Titan este învăluit într-o atmosferă densă, bogată în compuși organici, care îi conferă culoarea portocalie caracteristică. Fotografia a fost făcută de sonda spațială Cassini.

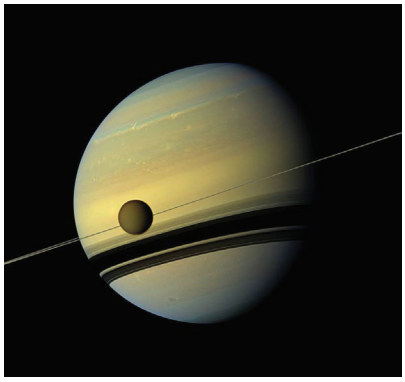


Fig. 7.2.3. (NASA/JPL-Caltech)



Fig. 7.2.4. (NASA/JPL)



Fig. 7.2.5. (NASA/JPL-Caltech)

Phobos, unul dintre sateliții planetei **Marte** (fig, 7.2.4), are o formă neregulată și este dominat de craterul Stickney, apărut ca urmare a unui impact major cu un meteorit.

În fig. 7.2.5 este fotografiat **Ganymede**, cel mai mare satelit din Sistemul Solar. Ganymede are suprafața marcată de cratere și structuri liniare, datorate activității geologice din trecut. Imaginea a fost realizată de sonda spațială Galileo (NASA).

Cei mai mulți dintre sateliți au **orbite eliptice**. Vitezele lor orbitale nu sunt constante pe traiectorie, viteza fiind mai mică atunci când satelitul este mai departe de planeta pe care o orbitează și mai mare când se află mai aproape de planetă. Luna are o **orbită** ușor eliptică, ce poate fi considerată într-o bună aproximație **circulară.** Mulți dintre sateliții planetelor Jupiter și Saturn au **orbite aproape circulare**.

Și în acest caz, ca și în cazul planetelor ale căror **orbite** sunt **aproape circulare**, viteza orbitală poate fi calculată în acord cu relația 7.2.1 (am notat cu M masa planetei și cu r raza orbitei circulare a satelitului):

$$v = \sqrt{K\frac{M}{r}} \qquad (7.2.2)$$

În jurul planetelor nu orbitează doar sateliți naturali, ci și sateliți artificiali.

Sateliții artificiali sunt obiecte create de oameni și lansate în spațiu **pentru a orbita** în jurul Pământului sau în jurul altor planete. Ei sunt utilizați în comunicații, navigație, meteorologie sau cercetare. De exemplu, sateliții sistemului GPS permit determinarea poziției pe glob.

Cu ce **viteză trebuie lansat** un obiect pentru a **deveni satelit** artificial al Pământului?

Isaac Newton a arătat că, dacă un obiect este lansat orizontal de pe un munte, cu viteză mică, el cade pe Pământ (fig. 7.2.6). Dacă viteza de lansare crește, obiectul ajunge mai departe. La o viteză suficient de mare, obiectul cade permanent spre Pământ, dar îl „ratează" continuu, deplasându-se pe orbită în jurul planetei. Astfel, sub acțiunea atracției gravitaționale exercitate de Pământ, Luna cade spre acesta, dar, datorită vitezei sale mari, îl „ratează", deplasându-se pe o traiectorie aproape circulară în jurul planetei.

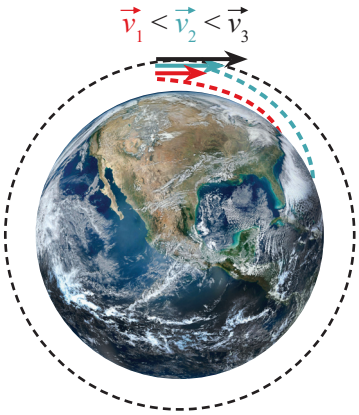


Fig. 7.2.6

Reține

Prima viteză cosmică reprezintă **viteza minimă** care trebuie imprimată transversal unui corp pentru a putea descrie o orbită circulară în jurul unui corp ceresc, la o înălțime neglijabilă față de raza acestuia.

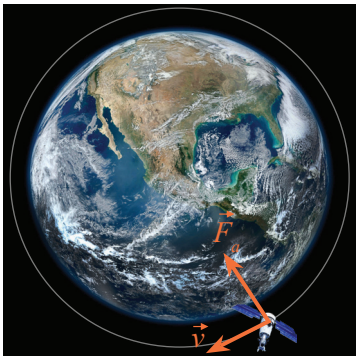


Fig. 7.2.7

Prima viteză cosmică se calculează considerând că satelitul este lansat orizontal de la o înălțime neglijabilă față de raza planetei de masă M. În acest caz, raza orbitei este aproximativ egală cu raza planetei, $R + h \approx R$. Satelitul este menținut pe orbită de forța gravitațională (fig. 7.2.7), care joacă rol de **forță centripetă** și îi imprimă o **accelerație normală**, orientată spre centrul planetei (neglijând forțele de interacțiune cu atmosfera planetei):

$$m \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_a$$

Rescriind relația scalar și înlocuind expresiile matematice pentru accelerația normală și forța de atracție gravitațională, obținem:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot a_n &= F_a \\ a_n &= \frac{v_I^2}{R} \\ F_a &= K\frac{m \cdot M}{R^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\frac{v_I^2}{R} = K\frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow v_I = \sqrt{K\frac{M}{R}} \qquad (7.2.3)$$

Putem exprima prima viteză cosmică în funcție de accelerația gravitațională la suprafața respectivei planete:

$$g_0 = K\frac{M}{R^2} \qquad (7.2.4)$$

Înlocuind această relație în relația (7.2.3), obținem expresia matematică pentru prima viteză cosmică:

$$\left.\begin{aligned} v_I &= \sqrt{K\frac{M}{R}} \\ g_0 &= K\frac{M}{R^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_I = \sqrt{g_0 \cdot R}$$

Prima viteză cosmică pentru un satelit al Pământului are valoarea:

$$v_{IP} = \sqrt{g_0 \cdot R_P} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6370 \cdot 10^3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Reține

A doua viteză cosmică reprezintă **viteza minimă** necesară pentru ca un corp **să părăsească definitiv câmpul gravitațional** al unui corp ceresc**.**

Pentru ca acel corp, lansat cu viteza v, să poată ajunge oricât de departe de planetă, el trebuie să aibă o energie cinetică inițială cel puțin egală cu lucrul mecanic efectuat de forța de atracție gravitațională a planetei. La limită, dacă energia **cinetică este egală cu lucrul mecanic**, obținem cea de a doua viteză cosmică, v_{II}. Aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul de masă m și neglijând orice alte forțe, obținem:

$$0 - \frac{m \cdot v_{II}^2}{2} = L \qquad (7.2.5)$$

Dacă lansăm corpul de la o înălțime neglijabilă față de raza planetei de masă M ($R + h \approx R$), energia potențială a sistemului corp-planetă este:

$$E_p = -K\frac{m \cdot M}{R}$$

Forța de atracție gravitațională este o forță conservativă, deci putem aplica teorema de variație a energiei potențiale pentru sistemul corp-planetă:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_P &= -L \\ \Delta E_P &= 0 - \left(-K\frac{m \cdot M}{R}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = -K\frac{m \cdot M}{R} \qquad (7.2.6)$$

Înlocuind relația 7.2.6 în relația 7.2.5, obținem expresia matematică pentru **cea de a doua viteză cosmică:**

$$\left.\begin{aligned} 0 - \frac{mv_{II}^2}{2} &= L \\ L &= -K\frac{m \cdot M}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{mv_{II}^2}{2} = K\frac{m \cdot M}{R} \Rightarrow v_{II} = \sqrt{2\frac{K \cdot M}{R}} \qquad (7.2.7)$$

Din relațiile 7.2.3 și 7.2.7 se observă că nici prima și nici a doua viteză cosmică **nu** depind de masa corpului aflat în discuție, ci doar de masa și raza planetei respective.

Putem exprima și această viteză în funcție de accelerația gravitațională la suprafața planetei, g_0:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= K\frac{M}{R^2} \\ v_{II} &= \sqrt{2\frac{K \cdot M}{R}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{II} = \sqrt{2g_0 \cdot R}$$

Viteza de „evadare” din câmpul gravitațional al Pământului are valoarea:

$$v_{II} = \sqrt{2g_0R_P} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6370 \cdot 10^3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cong 11{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

În concluzie, pentru un corp lansat cu o viteză orizontală de o la înălțime neglijabilă față de raza planetei de masă M, adică „lansat de la nivelul mării“, dacă neglijăm frecarea cu atmosfera, pot apărea următoarele cazuri:

- $v < v_I$, corpul cade pe Pământ;
- $v = v_I$, corpul devine satelit al planetei, orbita sa fiind circulară;
- $v_I < v < v_{II}$, satelitul descrie o orbită eliptică în câmpul gravitațional al planetei;
- $v \geq v_{II}$, corpul „se desprinde“ definitiv de câmpul gravitațional al planetei.

A treia viteză cosmică este viteza minimă necesară unui corp pentru a părăsi Sistemul Solar. Această viteză are aproximativ valoarea: $v_{III} \approx 16{,}7$ km/s.

APLICĂ

1. Viteza orbitală medie a Pământului se poate calcula și ca raport între lungimea orbitei (aproximată prin circumferința unui cerc de rază egală cu distanța medie față de Soare, $d = 1UA$) și perioada de revoluție, $T = 1$ an. Calculează această viteză și compară rezultatul cu valoarea vitezei orbitale a Pământului calculată când am definit viteza orbitală.

Rezolvare:

Viteza medie este: $v_P = \dfrac{2\pi d}{T}$.

Exprimând datele din problemă în unități din SI și efectuând calculele numerice, obținem:

$$\left.\begin{aligned} d &= 1UA = 1296\cdot 10^7 \text{ m} \\ T &= 1 \text{ an} = 365\cdot 24\cdot 3600 \cong 3153,6\cdot 10^4 \text{ s} \\ v_P &= \frac{2\pi R_P}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_P = \frac{2\cdot 3\cdot 14\cdot 1496\cdot 10^7}{3153,6\cdot 10^4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cong 29,8\cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Această valoare coincide cu cea calculată anterior.

2. Sateliții artificiali pot evolua pe orbite circulare la înălțimi (măsurate față de suprafața Pământului) care nu mai pot fi neglijate în raport cu raza planetei (sunt lansați direct de la aceste înălțimi). Pentru doi astfel de sateliți artificiali, care se rotesc în jurul Pământului pe orbite circulare de raze $r_1 = 2R_P$ (R_P este raza Pământului), respectiv $r_2 = 4R_P$, calculează:

a. raportul perioadelor de revoluție T_1 / T_2;

b. raportul vitezelor orbitale v_1 / v_2.

Rezolvare:

a. Conform Legii a III-a a lui Kepler: $T^2 \sim a^3$.

În cazul nostru:

$$\frac{(T_1)^2}{(T_2)^2} = \frac{(2R_P)^3}{(4R_P)^3} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{(2)^{\frac{3}{2}}}{(4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cong 0,35$$

b. Viteza orbitală a unui satelit care orbitează o planetă de masă M pe o traiectorie circulară de rază r este (relația 7.2.2):

$$v = \sqrt{K\frac{M}{r}}$$

În cazul problemei noastre:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{K\dfrac{M}{(2R_p)}}}{\sqrt{K\dfrac{M}{(4R_p)}}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2} \cong 1,41$$

3. Telescopul Hubble (fig. 7.2.8), plasat pe orbită în 1990 de naveta spațială Discovery, orbitează la o altitudine de aproximativ h = 540 km deasupra suprafeței Pământului.

a. Neglijând frecarea cu atmosfera, calculează viteza orbitală a telescopului. Exprimă rezultatul în funcție de accelerația gravitațională la suprafața Pământului, $g_0 = 9,8$ m/s², raza Pământului $R = 6370$ km și de altitudinea h.

b. În realitate, din cauza frecării cu atmosfera rarefiată, altitudinea telescopului Hubble nu rămâne constantă, variind aproximativ între 500 km și 550 km. Traiectoria telescopului a fost corectată de mai multe ori de astronauți.



Fig. 7.2.8

Calculează energia pierdută prin frecare la trecerea satelitului de pe orbita cu altitudinea maximă $h_M = 550$ km pe orbita cu altitudinea minimă $h_m = 500$ km. Se cunosc: masa telescopului, $m_H = 1{,}11 \cdot 10^4$ kg, masa Pământului, $M_P = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, raza Pământului, $R_P = 6370$ km, și constanta atracției universale, $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (Nm²)/kg².

Rezolvare:

a. Telescopul se mișcă pe o orbită circulară de rază $R + h$ sub acțiunea forței de atracție gravitaționale. Mișcarea este circulară uniformă, cu accelerația a_n orientată pe aceeași direcție și în același sens cu forța de atracție gravitațională (fig. 7.2.9):

$$m \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_a$$

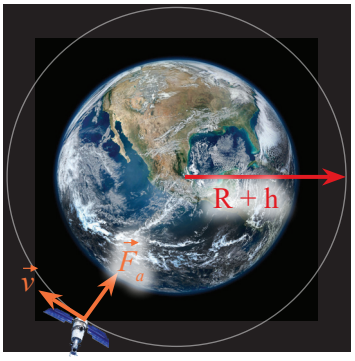


Fig. 7.2.9

Ținând cont de expresiile matematice ale mărimilor fizice accelerație normală a_n și forța de atracție gravitațională F_a, putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} m_H \cdot a_n &= F_a \\ a_n &= \frac{v_H^{\,2}}{R+h} \\ F_a &= K\frac{m \cdot M_P}{(R_P+h)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_H \frac{v_H^{\,2}}{R_P+h} = K\frac{m_H \cdot M_P}{(R_P+h)^2} \Rightarrow v_H = \sqrt{K\frac{M_P}{R_P+h}} \qquad (7.2.8)$$

Înlocuind în expresia 7.2.8 expresia matematică pentru accelerația gravitațională la suprafața Pământului, obținem:

$$\left.\begin{aligned} v_H &= \sqrt{K\frac{M_P}{R_P+h}} \\ g_0 &= K\frac{M_P}{R_P^{\,2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_H = \sqrt{g_0\frac{(R_P)^2}{R_P+h}} = R_P\sqrt{\frac{g_0}{R_P+h}}$$

Înlocuind valorile numerice și efectuând calculele matematice, obținem:

$$v_H = R_p\sqrt{\frac{g_0}{R_P+h}} = 6370 \cdot 10^3\sqrt{\frac{9{,}8}{6370 \cdot 10^3 + 540 \cdot 10^3}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7600\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b. Pierderea de energie mecanică este: $\Delta E_m = E_{t_f} - E_{t_0}$.

Energia totală este suma dintre energia cinetică și energia potențială de interacțiune:

$$\left.\begin{aligned} E_t &= E_c + E_p \\ E_c &= \frac{m_H \cdot v^2}{2} \\ E_P &= -K\frac{m_H \cdot M_P}{R_P+h} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_t = \frac{m_H \cdot v^2}{2} + \left(-K\frac{m_H \cdot M_P}{R_P+h}\right) \qquad (7.2.9)$$

Ținând cont de condiția de stabilitate a satelitului pe traiectoria circulară de rază $R_P + h$:

$$\frac{m_H \cdot v^2}{R_P+r} = K\frac{m_H \cdot M_P}{(R_P+r)^2} \Rightarrow m_H \cdot v^2 = K\frac{m_H \cdot M_P}{(R_P+r)} \qquad (7.2.10)$$

Înlocuind această relație în energia totală a satelitului (7.2.9), obținem:

$$\left.\begin{aligned} E_t &= \frac{m_H \cdot v^2}{2} + \left(-K\frac{m_H \cdot M_P}{R_P + h}\right) \\ m_H \cdot v^2 &= K\frac{m_H \cdot M_P}{(R_P + r)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_t = -K\frac{m_H \cdot M_P}{2(R_P + h)}$$

Revenind la datele problemei, pentru cele două orbite, putem scrie:

$$\Delta E_m = -K\frac{m_H \cdot M_P}{2(R_P + r_{\min})} - \left(-K\frac{m_H \cdot M_P}{2(R_P + r_{\max})}\right) \Rightarrow \Delta E_m = -\frac{K \cdot m_H \cdot M_P}{2}\left(\frac{1}{R_P + r_{\min}} - \frac{1}{R_P + r_{\max}}\right)$$

Înlocuind valorile numerice și efectuând calculele numerice, obținem:

$$\Delta E_m = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,11 \cdot 10^4 \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{2} \cdot \left(\frac{1}{6,90 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,95 \cdot 10^6}\right) \text{J} \cong -2,3 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

EXERSEAZĂ

1. A treia viteză cosmică este viteza minimă necesară unui corp pentru a părăsi Sistemul Solar. Dă un exemplu de sondă spațială care a părăsit Sistemul Solar.

2. Realizează un scurt eseu despre sonda spațială adusă în discuție la exercițiul 1, în care să prezinți caracteristicile acesteia, anul lansării, anul în care a părăsit Sistemul Solar, scopul misiunii etc.

3. Alege și notează în caiet răspunsurile corecte:

a. dacă ar exista forța de atracție gravitațională, dar viteza orbitală a Lunii ar fi zero, Luna ar cădea spre Pământ;

b. dacă Luna ar avea viteză orbitală, dar forța de atracție gravitațională ar fi neglijabilă, Luna s-ar deplasa pe o traiectorie rectilinie;

c. forța de atracție gravitațională nu influențează traiectoria Lunii;

d. Luna este atrasă gravitațional de Pământ, deci cade spre el, dar în același timp ea are viteză orbitală suficient de mare încât să îl rateze continuu.

4. Justifică afirmația: Viteza orbitală a unei planete este mai mare la periheliu, când planeta este aproape de Soare, și mai mică la afeliu, când este mai departe de Soare.

5. Satelitul Sentinel 2 (fig. 7.2.10) are masa m = 1140 kg și orbitează la altitudinea h = 786 km deasupra Pământului. El este „ochiul din spațiu” care fotografiază constant Pământul pentru a înțelege și proteja mediul: monitorizează vegetația (sănătatea culturilor, defrișările, incendiile etc.) și sprijină intervențiile în caz de dezastre (incendii, inundații). Orbita sa este heliosincronă (trece peste aceeași zonă la aceeași oră solară). Se cunosc: masa Pământului, $M_P = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, raza Pământului, $R_P = 6370$ km, și constanta atracției universale, $K = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (Nm^2)/kg^2.

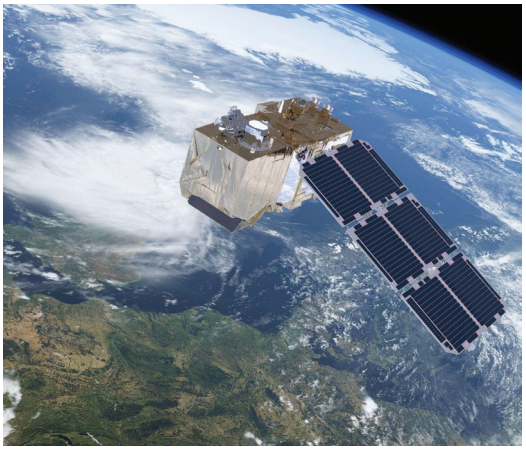


Fig. 7.2.10

Calculează:
e. viteza orbitală a satelitului;
f. energia mecanică totală a satelitului;
g. cum se modifică energia mecanică totală dacă raza orbitei sale s-ar dubla.

6. Prima viteză cosmică a unei planete sferice este v_I = 8000 m/s. Calculează densitatea medie a planetei. Se cunosc: secțiunea transversală a planetei, $S = 3{,}75 \cdot 10^8$ km^2, și constanta atracției universale, $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (Nm^2)/kg^2.

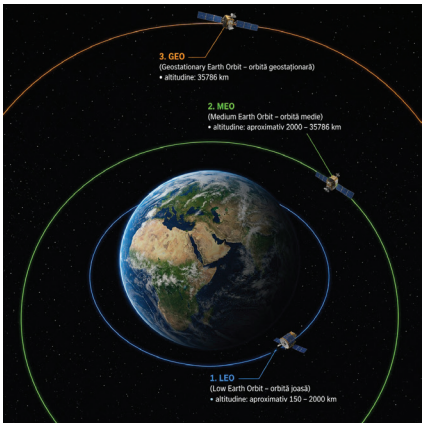
7. Determină altitudinea la care trebuie plasat pe orbită un satelit artificial pentru a fi geostaționar (pentru a rămâne mereu deasupra aceluiași punct de pe suprafața Pământului) și orientarea planului traiectoriei lui. Pentru masa Pământului, raza sa și constanta gravitațională folosește datele numerice din problema 6.

PROIECT

Vrei să **plasezi habitatul spațial** al cărui plan ai început să îl schițezi în capitolul 3, **undeva, în spațiu.** Poți alege una dintre orbitele pe care sunt plasați sateliții în jurul Pământului, un punct Lagrange sau vecinătatea unui corp ceresc din Sistemul Solar.

A. **Studiază cele trei tipuri de orbite existente** în jurul Pământului. În funcție de avantajele și dezavantajele fiecăreia, decide dacă plasezi colonia pe una dintre aceste orbite. Justifică alegerea.

Indicație:
În jurul Pământului există trei tipuri principale de orbite pentru sateliți, clasificate în funcție de altitudine și utilizare:



1. LEO (Low Earth Orbit – orbită joasă)
• altitudine: aproximativ 150 – 2000 km;
• sateliții se află aproape de Pământ;
• utilizată pentru observații (imagini, monitorizare);
• Stația Spațială Internațională orbitează pe LEO.

2. MEO (Medium Earth Orbit – orbită medie)
• altitudine: aproximativ 2000 – 35786 km;
• sateliții care orbitează pe MEO au perioade mai mari de rotație;
• utilizată în special pentru navigație (exemplu: GPS).

3. GEO (Geostationary Earth Orbit – orbită geostaționară)
• altitudine: 35786 km;
• situată deasupra ecuatorului;
• satelitul pare fix față de Pământ;
• utilizată pentru telecomunicații și meteorologie.

Fiecare dintre cele trei orbite prezintă avantaje și dezavantaje. De exemplu, pe LEO este ușor și ieftin de ajuns, dar necesită corecții frecvente de orbită; MEO și GEO sunt mai stabile, dar radiațiile sunt mai intense și necesită protecție suplimentară.

B. Din cauza resturilor provenite de la sateliții deteriorați sau dezmembrați, **Pământul este înconjurat de deșeuri spațiale (space debris).** Acestea reprezintă un pericol real pentru navele spațiale sau pentru lansarea și funcționarea sateliților, inclusiv a coloniei spațiale proiectate de tine. Cui crezi că **îi revine responsabilitatea de a curăța spațiul de aceste resturi?**

Lucrează în echipă cu colegii tăi și organizați o dezbatere pe această temă. Formulați argumente, analizați punctele de vedere și notați în caiete concluziile la care ajungeți.



La finalul acestui capitol, vei fi capabil:

- să identifici fenomene fizice specifice fluidelor în situații din viața cotidiană;
- să utilizezi legile fizicii care descriu comportarea fluidelor pentru explicarea unor fenomene și aplicații din viața cotidiană;
- să înțelegi și să stabilești conexiuni între mărimi fizice precum forță și presiune, forță arhimedică și plutire, densitate, debit, arie a secțiunii de curgere și viteza de curgere a fluidelor;
- să aplici relațiile matematice și legile din mecanica fluidelor în rezolvarea problemelor teoretice și practice;
- să explici funcționarea unor dispozitive și instalații bazate pe proprietățile fluidelor (prese hidraulice, submarine, densimetre, sisteme de alimentare cu apă etc.), folosind un limbaj specific fizicii;
- să înregistrezi, să organizezi și să reprezinți grafic date experimentale;
- să analizezi critic precizia măsurătorilor și regularitățile observate în datele experimentale;
- să dezvolți capacității de investigare și modelare a fenomenelor fizice specifice fluidelor.

Capitolul 8

Noțiuni de mecanica fluidelor

8.1. Noțiuni de statica fluidelor

Te-ai întrebat vreodată de ce nu ne putem scufunda la adâncimi oricât de mari, chiar dacă purtăm tuburi cu oxigen? Sau de ce costumele astronauților sunt presurizate? Cum este posibil ca vapoare uriașe să plutească pe apă, un balon cu heliu să se ridice în aer, iar o bilă de metal să se scufunde?

La prima vedere, aceste fenomene par fără legătură între ele. Totuși, toate au o explicație comună. În această lecție vom descoperi împreună ce sunt fluidele și ce proprietăți ale acestora stau la baza fenomenelor de mai sus.

În clasele de gimnaziu ai învățat că, din punctul de vedere al stării de agregare, substanțele pot fi în stare gazoasă, lichidă sau solidă.

Gazele și lichidele poartă denumirea de **fluide.**

Statica fluidelor cuprinde:

a. Hidrostatica – studiază lichidele aflate în echilibru

b. Aerostatica – studiază gazele aflate în echilibru

Reține

Prin definiție, un **fluid** este o substanță care **poate curge** și care ia forma vasului în care se află.

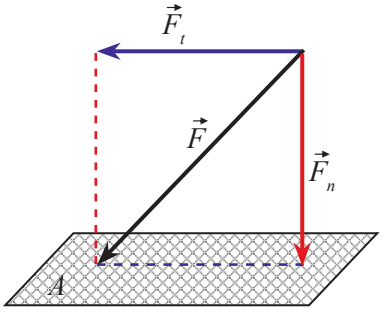


Fig. 8.1.1

Asemenea corpurilor solide, lichidele și gazele exercită forțe asupra suprafețelor cu care vin în contact. Pentru a descrie acest efect, folosim mărimea fizică numită presiune.

Reține

Presiunea este o mărime fizică scalară, numeric egală cu raportul dintre forța normală uniform distribuită pe o suprafață și aria A a suprafeței respective (fig. 8.1):

$$p = \frac{F_n}{A} \qquad (8.1)$$

Unitatea de măsură pentru presiune, în SI se numește **pascal**:

$$[p]_{SI} = \text{Pa}$$


Fig. 8.1.2. Blaise Pascal, 1623-1662

Reține

Un **pascal** reprezintă presiunea exercitată de o forță normală de un 1 N, uniform distribuită pe o suprafață cu aria de 1 m^2:

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \qquad (8.2)$$

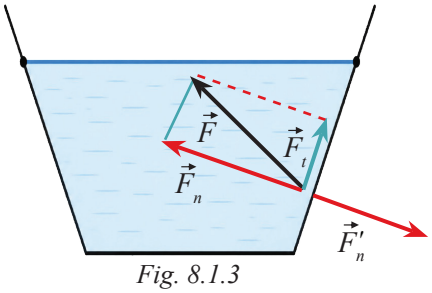


Fig. 8.1.3

Să ne imaginăm un lichid aflat în echilibru într-un vas oarecare (fig. 8.1.3). Dacă lichidul exercită o forță pe peretele vasului care îl conține, atunci, conform principiului al III-lea al mecanicii, vasul reacționează asupra lichidului cu o forță egală în modul și de sens opus. Dacă această forță $\vec{F}'_n$ nu ar fi perpendiculară pe peretele vasului, componenta sa paralelă cu peretele $\vec{F}_t$ ar împiedica lichidul să rămână în echilibru. Deoarece lichidul este în echilibru, rezultă că forța de reacțiune din partea peretelui $\vec{F}_n$ este egală ca valoare și de sens opus cu forța exercitată de lichid asupra peretelui, perpendicular pe acesta.

Reține
Un **lichid aflat în echilibru** exercită **forțe perpendiculare pe suprafețele cu care se află în contact**.

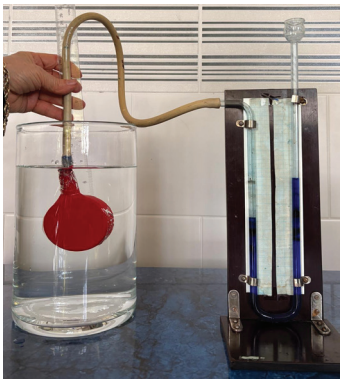
Se întâmplă oare la fel și în cazul gazelor?

EXPERIMENTEAZĂ
Poți verifica acest lucru printr-un experiment foarte simplu: pune într-un balon puțină pudră de talc. Umflă balonul și agită-l pentru a repartiza pudra pe pereții interiori ai balonului. Înțeapă apoi balonul într-un punct oarecare; vei observa că pudra de talc iese din balon sub forma unui jet, orientat perpendicular pe peretele acestuia.
Repetând experimentul pentru un alt punct, vei observa același lucru. Ce concluzie poți trage?

Reține
Pe fiecare element de suprafață în contact cu un **fluid aflat în repaus** se exercită **forțe perpendiculare** pe suprafața respectivă, **indiferent de orientarea acestuia.**

Presiunea hidrostatică

Sub acțiunea forței gravitaționale, straturile unui fluid aflat în echilibru apasă unele asupra altora. Presiunea existentă într-un punct oarecare din interiorul unui fluid aflat în echilibru în câmp gravitațional uniform se numește **presiune hidrostatică** (în cazul lichidelor) sau **aerostatică** (în cazul gazelor). Pentru a studia proprietățile presiunii hidrostatice, folosim capsula manometrică (fig. 8.1.4).


Fig. 8.1.4

EXPERIMENTEAZĂ:
➢ Toarnă apă în vasul de sticlă.
➢ Conectează capsula manometrică la un tub manometric în formă de U prin intermediul unui furtun, ca în fig. 8.1.4.
➢ Introdu capsula manometrică în vasul cu apă, la o anumită adâncime.
➢ Notează în caiet adâncimea h la care se află centrul capsulei și denivelarea Δh a lichidului din tubul manometric.

Forța exercitată de lichidul din vas asupra membranei capsulei manometrice curbează membrana, determinând creșterea presiunii aerului închis în dispozitiv. Creșterea presiunii aerului închis în capsula manometrică și în tubul de cauciuc produce denivelarea lichidului colorat în albastru din tubul manometric. (Denivelarea lichidului din tubul manometric este o măsură a presiunii exercitate asupra membranei capsulei manometrice).

➢ Repetă experimentul pentru alte două adâncimi și notează în caiet, de fiecare dată, adâncimea h la care se află centrul capsulei și denivelarea Δh a lichidului din tubul manometric.

➢ Compară denivelările datorate presiunii exercitate de lichid la aceste trei adâncimi. *Vei constata că presiunea crește proporțional cu adâncimea.*

➢ Pentru o adâncime oarecare, orientează capsula manometrică în direcții diferite de cel puțin trei ori, păstrând centrul membranei elastice la aceeași adâncime. Notează de fiecare dată denivelarea Δh a lichidului din tubul manometric.

➢ Deplasează capsula pe orizontală și repetă experimentul în alt punct de la acel nivel. *Vei constata că denivelarea datorată presiunii exercitate de lichidul aflat în echilibru în câmp gravitațional uniform are aceeași valoare în orice punct al unei suprafețe orizontale, indiferent de orientarea în spațiu.*

➢ Repetă experimentul înlocuind apa cu alcool medicinal**.** *Vei constata că presiunea exercitată de lichid la un anumit nivel depinde de densitatea lichidului în care este scufundată capsula manometrică.*

Să calculăm **diferența presiunilor dintre două puncte ale unui lichid de densitate** ρ, aflat în echilibru în câmp gravitațional. Pentru aceasta, să delimităm mental în interiorul lichidului un paralelipiped cu baza de arie S și înălțimea Δh (fig. 8.1.5). Acest paralelipiped se află în echilibru sub acțiunea propriei greutăți și a forțelor de presiune exercitate pe suprafețele sale. Forțele de presiune exercitate la fiecare nivel pe suprafața laterală se vor anula două câte două. Pe suprafața superioară și, respectiv, inferioară se vor exercita două forțe normale, F_1 și F_2. Considerăm forțele F_1 și F_2 uniform distribuite pe suprafața respectivă. Condiția de echilibru asupra paralelipipedului delimitat este:

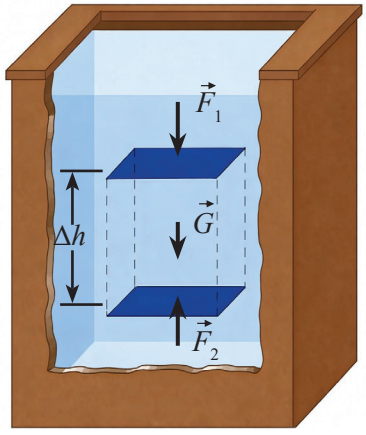


Fig. 8.1.5

$$\vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$
$$G + F_1 = F_2$$

Putem exprima greutatea G astfel:

$$G = m \cdot g$$
$$m = \rho \cdot S \cdot \Delta h$$

Forțele F_1 și F_2 pot fi exprimate în funcție de presiunile exercitate de lichid asupra paralelipipedului delimitat mental, astfel:

$$F_1 = p_1 \cdot S$$
$$F_2 = p_2 \cdot S$$

Revenind în condiția de echilibru:

$$\rho \cdot S \cdot \Delta \cdot g + p_1 \cdot S = p_2 \cdot S$$
$$\Delta p = p_2 - p_1 \Rightarrow \Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h \qquad (8.3)$$

Deci diferența de presiune dintre două suprafețe orizontale din interiorul unui lichid de densitate constantă ρ, aflat în echilibru în câmp gravitațional uniform, este egală cu greutatea păturii respective de lichid de grosime Δh, raportată la unitatea de suprafață. Tot acest raționament și calculele aferente se pot face și în cazul unui gaz, dacă se consideră că densitatea lui este constantă.

Reține

Presiunea existentă într-un punct oarecare în interiorul unui fluid ca urmare a acțiunii unui câmp gravitațional asupra acestuia se numește **presiune hidrostatică**.

Pentru **fluidele a căror densitate este constantă**, ρ, la adâncimea h (fig. 8.6) în interiorul fluidului, **presiunea hidrostatică** se poate calcula cu ajutorul relației:

$$p = \rho \cdot g \cdot h \qquad (8.4)$$

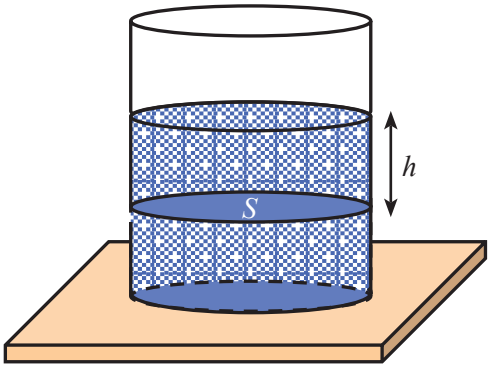


Fig. 8.1.6

Se observă că presiunea hidrostatică este independentă de forma vasului în care se află lichidul și are **aceeași valoare** în toate punctele aflate la **aceeași adâncime** în lichid.

În cazul presiunii aerostatice (la gaze), relația de mai sus poate fi folosită doar pentru diferențe mici de nivel h, astfel încât densitatea gazului să poată fi considerată constantă pe intervalul analizat. În cazul în care diferențele de nivel pot să nu fie mici, așa cum se întâmplă pentru atmosfera terestră, faptul că un gaz este compresibil face ca greutatea straturilor superioare ale acestuia să comprime straturile inferioare și densitatea să crească cu scăderea altitudinii. Presiunea existentă în atmosfera terestră se numește **presiune atmosferică.**

Valoarea presiunii atmosferice a fost determinată pentru prima dată de fizicianul italian Evangelista Torricelli (1608-1647). Torricelli a procedat în felul următor:



Fig. 8.1.7. E. Torricelli, 1608-1647

• A turnat mercur într-un tub subțire de sticlă, cu lungimea de aproximativ 1 m închis la un capăt, numit tub barometric, până la umplerea lui completă.

• A rotit tubul cu 180° (ținând acoperit cu degetul capătul deschis) și l-a introdus cu gura în jos într-o cuvă cu mercur.

• A îndepărtat degetul și a observat că doar o parte din mercurul din tub s-a scurs în cuvă (vezi fig. 8.1.8).

• Deasupra coloanei de mercur rămase în tub s-a format un spațiu vidat, numit cameră barometrică.

• Deoarece deasupra mercurului este vid, presiunea exercitată de coloana de mercur aflată deasupra nivelului mercurului din cuvă, în echilibru în câmp gravitațional terestru, are valoarea: $p_B = \rho_{Hg} \cdot g \cdot H$.

• Suprafața orizontală liberă a mercurului din cuvă fiind o suprafață de egală presiune, presiunea în punctul B este egală cu presiunea în punctul C: $p_B = p_C$.

• Dar presiunea în punctul C este chiar presiunea atmosferică: $p_C = p_0$.

• Deci:

$$p_B = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

$$p_C = p_0$$

$$p_C = p_B \Rightarrow p_0 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot H$$

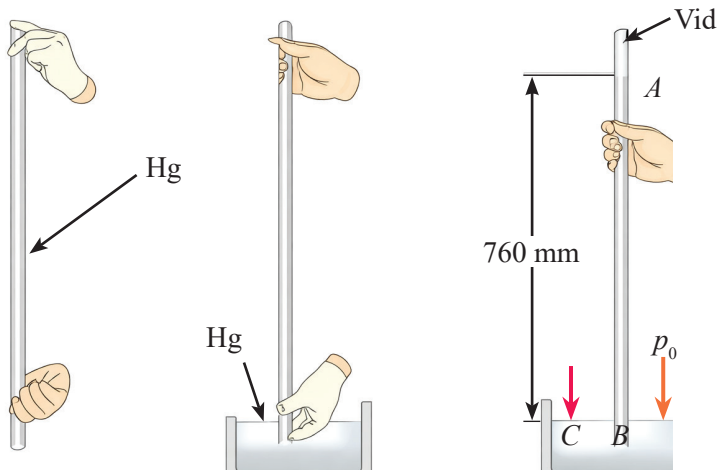


Fig. 8.1.8

În concluzie, pentru a determina valoarea presiunii atmosferice, este suficient să măsurăm înălțimea coloanei de mercur care echilibrează presiunea atmosferică și să cunoaștem densitatea mercurului, precum și valoarea accelerației gravitaționale a locului în care se efectuează experiența.

Reține

Presiunea atmosferică este egală cu **presiunea hidrostatică** exercitată de coloana de mercur la baza sa: $p_0 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot H$.

Experimental, se constată că înălțimea coloanei de mercur care echilibrează **presiunea atmosferică variază în funcție de altitudine și de condițiile meteorologice specifice diferitelor regiuni**.

Prin convenție, se consideră presiunea atmosferică normală ca fiind presiunea atmosferică la nivelul mării și la temperatura de 0°C pentru care înălțimea coloanei de mercur are valoarea $H = 760$ mm:

$$p_0 = 13597,40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,80 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,76 \text{ m} \cong 101325 \text{ Pa}.$$

Aceasta trebuie interpretată doar ca o valoare medie. Cele mai mari valori ale presiunii atmosferice la nivelul mării se înregistrează în Siberia (peste 105 kPa), iar cele mai mici valori apar în centrele ciclonilor tropicali (aproximativ 87 kPa).

Presiunea atmosferică se măsoară cu **barometrul**.

Legea lui Pascal

Când ai efectuat experimentul cu capsula barometrică ai observat că, pentru același nivel h în interiorul lichidului, în ramurile tubului barometric, denivelarea lichidului era aceeași. Cum se transmite presiunea în interiorul unui lichid? Fizicianul francez Blaise Pascal a descoperit, în 1663, că **presiunea exercitată din exterior asupra suprafeței** unui lichid considerat incompresibil **se transmite cu aceeași intensitate** în orice punct din interiorul fluidului.

Reține

Legea lui Pascal: Presiunea exercitată din exterior la suprafața unui fluid incompresibil se transmite în fluidul respectiv cu aceeași intensitate în toate punctele și în toate direcțiile.

Legea lui Pascal este o **consecință a legii conservării energiei mecanice**. Acest lucru poate fi demonstrat foarte ușor:

Pentru deplasări foarte, foarte mici x_1 și x_2, variația de energie mecanică a sistemului din fig. 8.1.9 este 0, deci lucrul mecanic total efectuat asupra suprafețelor S_1 și S_2 de către forțele F_1 și, respectiv, F_2 (distribuite uniform) este egal cu 0:

$$\left.\begin{aligned} L_1 + L_2 &= 0 \\ L_1 &= F_1 \cdot x_1 \\ L_2 &= -F_2 \cdot x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_1 \cdot x_1 = F_2 \cdot x_2$$

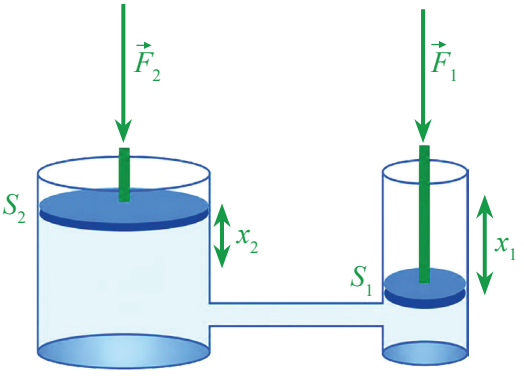


Fig. 8.1.9

(Se consideră că forțele F_1 și F_2 rămân constante în timpul deplasărilor.)

Deoarece lichidul este incompresibil, putem scrie:

$$V_1 = V_2$$
$$V_1 = S_1 \cdot x_1 \Rightarrow S_1 \cdot x_1 = S_2 \cdot x_2$$
$$V_2 = S_2 \cdot x_2$$

Împărțind membru cu membru relațiile:

$$\left.\begin{aligned} F_1 \cdot x_1 &= F_2 \cdot x_2 \\ S_1 \cdot x_1 &= S_2 \cdot x_2 \end{aligned}\right.,$$

vom obține:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p.$$

Deci **presiunea exercitată pe suprafața unui lichid se transmite cu aceeași intensitate prin toate punctele lichidului.**

În cazul gazelor, care sunt compresibile, presiunea nu se transmite integral. De exemplu, în cazul unei explozii, creșterea de presiune într-un punct anume din aer se resimte din ce în ce mai puțin în celelalte puncte aflate la distanțe din ce în ce mai mari. Legea lui Pascal are numeroase aplicații practice, despre care vom discuta într-un subcapitol viitor.

Legea lui Arhimede

EXPERIMENTEAZĂ:

- Suspendă de un dinamometru un corp metalic (fig. 8.1.10).
- Așteaptă să se realizeze echilibrul mecanic și notează în caiet indicația dinamometrului (forța indicată de dinamometru este egală, la echilibru, cu greutatea corpului metalic).
- Repetă experimentul, dar cu corpul suspendat de dinamometru complet introdus în apă.
- După ce s-a realizat echilibrul mecanic, notează în caiet indicația dinamometrului.
- Repetă experimentul folosind același lichid, dar un corp mai voluminos confecționat din același material.
- Repetă experimentul folosind același corp, dar un alt lichid.

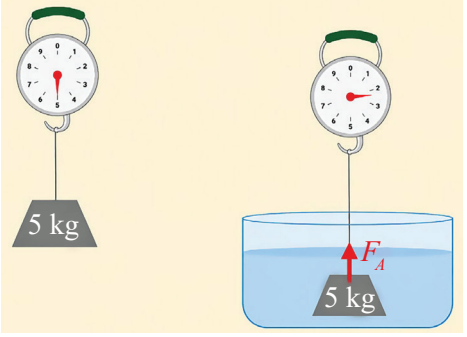


Fig. 8.1.10

Constatăm că forța indicată de dinamometru este mai mică în cazul în care corpul metalic a fost introdus în lichid. Cum forța de interacțiune dintre corp și Pământ (greutatea corpului) nu s-a modificat, înseamnă că lichidul acționează asupra corpului scufundat în el cu o forță orientată vertical în sus. Cu cât volumul corpului scufundat este mai mare, cu atât forța de interacțiune dintre corp și lichid este mai mare. Această forță depinde și de densitatea lichidului. Arhimede a studiat acest fenomen în secolul al III-lea î.H. și a enunțat legea care îi poartă numele.

Reține

Legea lui Arhimede: Un corp scufundat într-un fluid aflat în echilibru în câmp gravitațional uniform este împins de jos în sus cu o forță verticală egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp.

Pentru **a demonstra legea, delimităm mental** în interiorul fluidului un volum oarecare V. Asupra fluidului de volum V acționează propria sa greutate $G = m \times g$, precum și forțele de presiune exercitate de restul fluidului, perpendicular pe suprafața ce delimitează volumul V (fig. 8.1.11). Fluidul delimitat este în echilibru mecanic, deci greutatea sa este egală în modul și de sens opus cu rezultanta forțelor de presiune exercitate de restul fluidului. Rezultanta acestor forțe are punctul de aplicație în centrul de greutate al volumului de fluid considerat. Dacă înlocuim volumul de fluid cu un corp oarecare de formă și volum V identice, rezultanta forțelor de presiune exercitate de fluid pe suprafața corpului nu se schimbă. Deci asupra corpului va acționa pe verticală, de jos în sus, o forță egală cu greutatea fluidului dezlocuit.

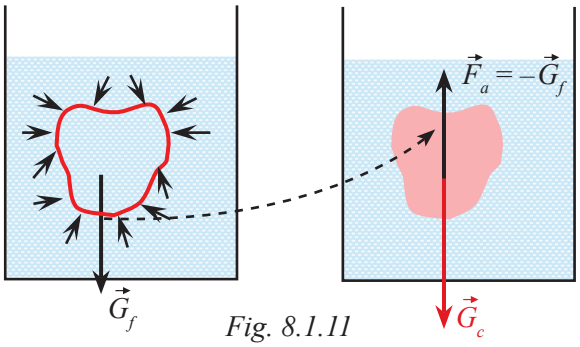


Fig. 8.1.11

Reține

Forța arhimedică este rezultanta forțelor de presiune exercitate de un fluid aflat în echilibru asupra unui corp scufundat în acel fluid. Punctul de aplicație al forței arhimedice este în centrul de greutate al fluidului dezlocuit și este numit **centru de presiune**.

Expresia matematică a forței arhimedice este: $F_A = G_f$, unde G_f reprezintă greutatea fluidului dezlocuit. În funcție de densitatea fluidului și de volumul său, putem exprima forța arhimedică astfel:

$$G_f = \rho_f \cdot V_f \cdot g \Rightarrow F_A = \rho_f \cdot V_f \cdot g \qquad (8.4)$$

Se observă că **forța arhimedică** depinde de natura fluidului prin densitatea ρ_f, și de volumul de fluid dezlocuit V_f.

Presupunând că doar o fracțiune f din volumul corpului se află scufundată în fluid, putem scrie: $V_f = f \cdot V_c$.

$$F_A = \rho_f \cdot V_f \cdot g = f \cdot \rho_f \cdot V_c \cdot g$$

Volumul corpului poate fi exprimat în funcție de masa și de densitatea sa astfel: $V_c = \frac{m}{\rho_c}$.

$$F_A = f \cdot \rho_f \cdot V_c \cdot g \Rightarrow F_A = f \cdot \frac{\rho_f}{\rho_c} \cdot m \cdot g \qquad (8.5)$$

Pentru corp scufundat complet în fluid:

$$f = 1 \Rightarrow F_A = \frac{\rho_f}{\rho_c} \cdot m \cdot g \qquad (8.6)$$

Se disting trei cazuri posibile:

1. $F_A > G$. Lăsat liber, corpul se ridică sub acțiunea forței $F = F_A - G$, numită **forță ascensională**. În situația în care un corp omogen este scufundat într-un lichid, forța ascensională îl va ridica până în momentul în care va pluti pe suprafața liberă a lichidului, sub acțiunea forțelor egale și de sens opus G și F'_A.

2. $F_A = G$. Densitatea fluidului este egală cu densitatea corpului: $\rho_f = \rho_c$

Corpul rămâne în echilibru de translație în orice punct în interiorul fluidului. Pentru un corp omogen, centrul de greutate coincide cu centrul de presiune, iar corpul se va afla și în echilibru de rotație. În cazul unui corpul neomogen, centrul de presiune și centrul de greutate nu coincid.

3. $F_A < G$. Lăsat liber, corpul se scufundă sub acțiunea **greutății aparente** G_a: $G_a = G - F_A$.

$$F_A = \frac{\rho_f}{\rho_c} \cdot m \cdot g \Rightarrow G_a = G\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_c}\right)$$

Despre aplicațiile legii lui Arhimede vom vorbi într-un subcapitol viitor.

APLICĂ

1. Calculează de câte ori este mai mică presiunea exercitată de apăsarea normală a unei coloane verticale de ulei asupra bazei sale, față de presiunea exercitată de apăsarea normală a unei coloane verticale de mercur, asupra bazei. Cele două coloane au aceeași înălțime și se află în echilibru în câmp gravitațional uniform. Exprimă rezultatul în funcție de densitatea ρ_u a uleiului și de densitatea ρ_{Hg} a mercurului.

Rezolvare:

Presiunea exercitată de o coloană de lichid la baza sa se datorează greutății coloanei respective:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{G}{S} \\ G &= m \cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p &= \frac{m \cdot g}{S} \\ m &= \rho \cdot V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p &= \frac{\rho \cdot V \cdot g}{S} \\ \frac{V}{S} &= h \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = \rho \cdot g \cdot h$$

Deci presiunea exercitată de coloana de ulei poate fi exprimată astfel: $p_u = \rho_u \cdot g \cdot h$.

Presiunea exercitată de coloana de mercur este: $p_{Hg} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$.

Făcând raportul celor două relații și simplificările, vom obține:

$$\frac{p_u}{p_{Hg}} = \frac{\rho_u \cdot g \cdot h}{\rho_{Hg} \cdot g \cdot h} \Rightarrow \frac{p_u}{p_{Hg}} = \frac{\rho_u}{\rho_{Hg}}.$$

2. Corpurile din fig. 8.1.12 au masele M și m și ariile suprafețelor de sprijin A_1 și, respectiv, A_2. Se neglijează frecările, scripetele este ideal, iar firul este inextensibil și de masă neglijabilă. Unghiul planului înclinat este α, iar accelerația gravitațională are valoarea g. Calculează:

a. presiunea exercitată de corpul de masă M asupra planului înclinat;

b. presiunea exercitată de corpul de masă m asupra planului orizontal;

c. în ce condiții răspunsul de la punctul b este posibil.

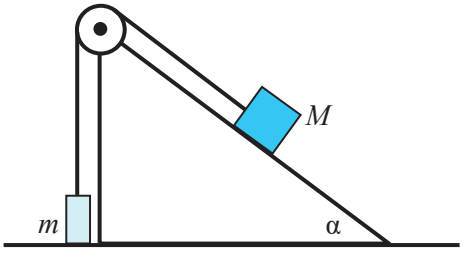


Fig. 8.1.12

Rezolvare:

a. Sistemul de corpuri fiind în echilibru, pentru corpul de masă M, putem scrie: $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 = 0$.

Proiectând această relație pe axele paralelă cu planul, respectiv, perpendiculară pe plan, vom obține (fig. 8.1.13):

$$\left.\begin{aligned} T &= G_{1t} \\ N_1 &= G_{1n} \\ G_{1t} &= G_1 \cdot \sin\alpha \\ G_{1n} &= G_1 \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = G_1 \cdot \sin\alpha, \text{ respectiv, } N_1 = G_1 \cdot \cos\alpha.$$

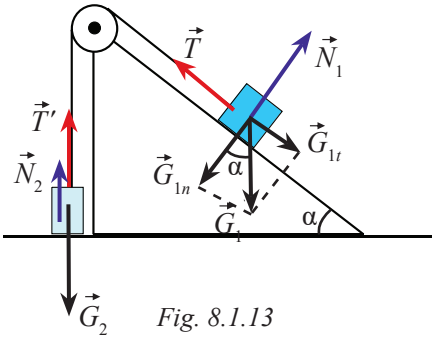


Fig. 8.1.13

Presiunea exercitată de corpul de masă M asupra planului înclinat este:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{N_1}{A_1} \\ N_1 &= G_{1n} = G_1 \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_1 = \frac{G_1 \cdot \cos\alpha}{A_1}$$

Exprimând greutatea G_1 în funcție de masa M, obținem:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= M \cdot g \\ p_1 &= \frac{G_1 \cdot \cos\alpha}{A_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_1 = \frac{M \cdot g \cdot \cos\alpha}{A_1}$$

b. Pentru corpul de masă m:

$$\vec{T}' + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 = \vec{0} \Rightarrow G_2 - N_2 - T' = 0$$

Calculăm forța normală N_2:

$$\left.\begin{aligned} &G_2 - N_2 - T' = 0 \\ &T = G_1 \cdot \sin\alpha \\ &T = T' \end{aligned}\right\} \Rightarrow G_2 - N_2 - G_1 \cdot \sin\alpha = 0$$

Exprimând greutățile în funcție de masele corpurilor, vom obține:

$$\left.\begin{aligned} N_2 &= G_2 - G_1 \cdot \sin\alpha \\ G_1 &= M \cdot g \\ G_2 &= m \cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow N_2 = m \cdot g - M \cdot g \cdot \sin\alpha$$

Revenind în expresia presiunii:

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \frac{N_2}{A_2} \\ N_2 &= m \cdot g - M \cdot g \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_2 = \frac{g \cdot (m - M \cdot \sin\alpha)}{A_2}$$

c. $p_2 \geq 0 \Rightarrow m \geq M \cdot \sin\alpha.$

3. Barometrul este un instrument utilizat pentru măsurarea presiunii atmosferice. El a fost inventat în anul 1643 de fizicianul italian Evangelista Torricelli. Barometrul măsoară presiunea atmosferică prin echivalare cu presiunea hidrostatică exercitată la baza sa de coloana de mercur aflată în interiorul acestuia:

$$p_0 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h.$$

Indicația barometrului devine eronată dacă, de exemplu, el este utilizat atunci când coloana de mercur nu se află în echilibru. Calculează:

a. accelerația cu care decolează o navă dacă barometrul de la bordul acesteia indică presiunea $p = p_0 /4$. Presiunea atmosferică din cabina navei este p_0, iar accelerația gravitațională g.

b. accelerația pe care o „simt” astronauții aflați la bordul navei.

Rezolvare:

a. Fie $\vec{N}$ forța de apăsare a coloanei de mercur de masă m și secțiune S la baza sa. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, aceeași forță ca valoare acționează și asupra coloanei, în sens opus (în sus). Aplicăm principiul fundamental al mecanicii pentru coloana de mercur.

$$ma = N - mg \Rightarrow N = m \cdot (g + a) = \rho_{Hg} \cdot S \cdot h \cdot (g + a)$$

Presiunea exercitată de coloana de mercur la baza sa este: $p = \frac{N}{S} = \rho_{Hg} \cdot (g + a) \cdot h.$

Conform legii lui Pascal, aceasta este egală ca valoare cu p_0:

$$p_0 = \rho_{Hg} \cdot (g + a) \cdot h \qquad (8.7)$$

Pe de altă parte însă, presiunea indicată în mod eronat de barometru este:

$$p = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{p}{\rho_{Hg} \cdot g} \qquad (8.8)$$

Din relațiile 8.7 și 8.8, obținem accelerația cu care decolează nava:

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \rho_{Hg} \cdot (g + a) \cdot h \\ h &= \frac{p}{\rho_{Hg} \cdot g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_0 = \rho_{Hg} \cdot (g + a) \cdot \frac{p}{\rho_{Hg} \cdot g} \Rightarrow g + a = \frac{p_0}{p} g \Rightarrow a = g\left(\frac{p_0}{p} - 1\right)$$

Cum $p = p_0/4$, obținem: $a = g\left(\frac{4p_0}{p_0} - 1\right) = 3g.$

b. Accelerația gravitațională aparentă resimțită de astronauți este cea din interiorul navei:

$$\left.\begin{aligned} g_{echiv} &= g + a \\ a &= 3g \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_{echiv} = 4g$$

(O astfel de accelerație poate fi suportată doar pentru perioade relativ scurte de timp.)

4. Un bazin cu apă are adâncimea h. Dintr-un punct situat la adâncimea $h/2$ se aruncă simultan, vertical în sus, respectiv vertical în jos, cu aceeași viteză inițială, două mici sfere de aceeași rază, dar de densități diferite ρ_1, respectiv, ρ_2.

Determină ce relație există între densitățile celor două sfere dacă ele ajung simultan la suprafață, respectiv la fundul bazinului. Se cunoaște densitatea apei ρ_a.

Rezolvare:

Calculăm accelerația bilei care urcă la suprafață: $m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_{A1} + \vec{G}_1$

Proiectând relația pe axa Oy și ținând cont de expresiile matematice pentru forța arhimedică și greutate, obținem (fig. 8.1.14):

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot a_1 &= F_{A1} - G_1 \\ F_A &= \frac{\rho_a}{\rho_1} m_1 \cdot g \\ G_1 &= m_1 \cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot g\left(\frac{\rho_a}{\rho_1} - 1\right) \Rightarrow a_1 = g\left(\frac{\rho_a}{\rho_1} - 1\right) \qquad (8.9)$$

Aplicăm legea de mișcare pentru acest corp:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 + v_0 t_1 + \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2} \\ y_0 &= 0 \\ y &= \frac{h}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{h}{2} = v_0 t_1 + \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2}$$

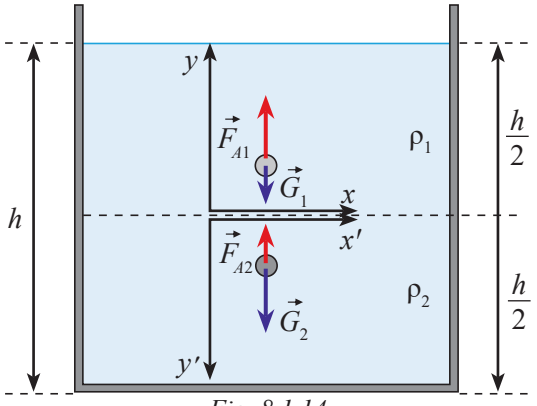


Fig. 8.1.14

Procedăm în același mod pentru bila care ajunge pe fundul vasului: $m_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_{A2} + \vec{G}_2$

$$\left.\begin{array}{l} m_2 \cdot a_2 = G_2 - F_{A2} \\ G_2 = m_2 \cdot g \\ F_{A2} = \dfrac{\rho_a}{\rho_2} m_2 \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_2}\right) \Rightarrow a_2 = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_2}\right) \qquad (8.10)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0 + v_0 t_2 + \dfrac{a_2 \cdot t_2^{\,2}}{2} \\ y_0 = 0 \\ y = \dfrac{h}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{h}{2} = v_0 t_2 + \frac{a_2 \cdot t_2^{\,2}}{2} \qquad (8.11)$$

Cum $$t_1 = t_2 \Rightarrow a_1 = a_2 \qquad (8.12)$$

Înlocuind expresiile celor două accelerații în relația 8.12, obținem:

$$g\left(\frac{\rho_a}{\rho_1} - 1\right) = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_2}\right) \Rightarrow \frac{\rho_a}{\rho_1} + \frac{\rho_a}{\rho_2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{\rho_a}.$$

EXERSEAZĂ

1. Descrie ce se întâmplă cu presiunea din interiorul unui avion care zboară la mare altitudine dacă unul dintre hublourile sale se sparge.

2. Într-un pahar cu apă plutesc câteva cuburi de gheață. Ce se întâmplă cu nivelul apei din pahar după ce se topesc cuburile?

3. Marchează cu adevărat **(A)** sau fals **(F)** următoarele afirmații:

a. În cazul în care costumul spațial al unui astronaut aflat în afara navei spațiale ar fi perforat de un micrometeorit, costumul astronautului s-ar depresuriza.

b. Un corp plutește pe suprafața unui fluid aflat în echilibru în câmp gravitațional uniform dacă greutatea sa este mai mare decât forța arhimedică.

c. Presiunea atmosferică crește odată cu creșterea altitudinii.

d. Legea lui Pascal afirmă că presiunea exercitată din exterior la suprafața unui lichid se transmite cu aceeași intensitate în orice punct și în toate direcțiile în lichidul respectiv.

4. Presiunea atmosferică la nivelul mării are valoarea $p_0 = 10^5$ Pa, iar densitatea apei oceanului are aproximativ valoarea $\rho = 1022$ kg/m^3. Calculează:

a. presiunea suportată de organismul unui scafandru care se scufundă la adâncimea de 15 m ($g = 9{,}8$ m/s^2);

b. de câte ori este mai mare această presiune decât presiunea suportată de scafandrul aflat pe malul mării.

5. Într-un cilindru orizontal închis la unul din capete se află aer, separat de mediul exterior cu ajutorul unui piston vertical de rază r ce se poate deplasa fără frecare. Pistonul este prins de un resort de constantă k (fig. 8.1.15). Calculează presiunea aerului din incintă știind că deformarea resortului este Δl. Consideră cunoscută valoarea presiunii atmosferice p_0.

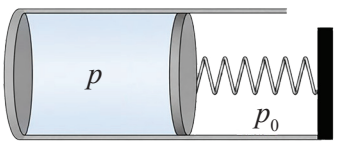


Fig. 8.1.15

6. Un corp omogen de densitate 750 kg/m^3 plutește la suprafața unui lichid aflat în echilibru în câmp gravitațional uniform. Corpul stă scufundat în lichid cu o fracțiune f = 0,75 din volumul său. Calculează densitatea lichidului.

7. Un bloc de gheață de grosime constantă plutește pe apă. Cunoscând densitatea apei de mare ρ = 1000 kg/m^3 și densitatea gheții ρ_g = 0,92 g/cm^3, calculează ce fracțiune din grosimea blocului se află deasupra apei.

8. Un copil de masă m = 50 kg se află în repaus pe un paralelipiped de gheață de arie A = 1 m^2 și grosime h = 50 cm. Paralelipipedul plutește pe apă. Se udă copilul pe picioare? Densitățile apei și a gheții sunt ρ = 1000 kg/m^3, respectiv, ρ_g = 0,90 g/cm^3.

9. Se modifică relația dintre densitățile sferelor din problema rezolvată numărul 4, dacă se lansează cu aceeași viteză, pe direcție orizontală?

10. Un vas în care se află un lichid a cărui densitate este ρ se mișcă accelerat pe verticală în jos cu accelerația $a < g$. Calculează presiunea hidrostatică la adâncimea h în interiorul lichidului. Particularizează pentru $a = g$.

11. Două corpuri paralelipipedice drepte, de aceeași înălțime, dar din materiale diferite (lemn de brad și lemn de stejar), plutesc pe suprafața liberă a unui lichid aflat în echilibru în câmp gravitațional uniform. Calculează raportul lungimilor scufundate pentru cele două corpuri (fig. 8.1.16). Densitățile corpurilor sunt $\rho_1 = 600\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, respectiv, $\rho_2 = 800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

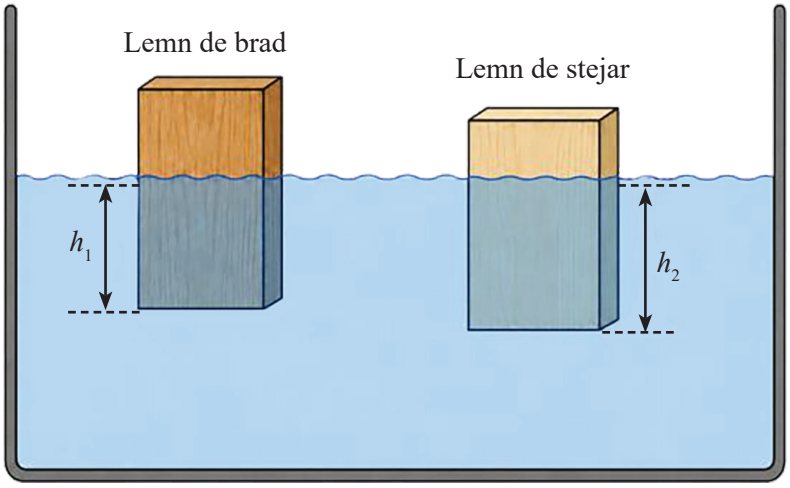


Fig. 8.1.16

12. Un vas în care se găsește un lichid de densitate ρ se mișcă astfel:
a. pe verticală în sus cu accelerația a;
b. pe verticală în jos cu accelerația $a < g$;
c. cade liber.
Dedu pentru cele trei cazuri expresia presiunii hidrostatice în interiorul lichidului, la adâncimea h.

13. Un vas cilindric având raza R = 5 cm și înălțimea h = 60 cm, se umple cu apă.
a) valoarea presiunii hidrostatice la baza cilindrului. Calculează:
b) forța exercitată de coloana de apă asupra bazei cilindrului.
Consideră g = 10 m/s^2 și densitatea apei ρ = 1000 kg/m^3.

14. Un corp pătrunde în apă pe verticală în jos, cu viteza inițială v_0 = 1 m/s. După intrarea în apă, corpul parcurge un spațiu s = 1 m, în timpul t = 0,4 s. Calculează densitatea corpului. Se neglijează forțele de frecare în aer și în apă. Cunoști g = 10 m/s^2 și densitatea apei, ρ = 1000 kg/m^3.

8.2. Fluid ideal. Curgere laminară

Atât gazele, cât și lichidele au proprietatea de a curge, adică sunt fluide. Dar proprietățile lor diferă semnificativ. De exemplu, lichidele sunt, practic, incompresibile, în timp ce gazele, nu; frecarea între straturile de gaz poate fi neglijată, dar nu poate fi ignorată în cazul straturilor de lichid; lichidele pot avea suprafață liberă, iar gazele, nu. Pot fi evidențiate proprietățile comune ale gazelor și lichidelor care să permită descrierea lor printr-un model unitar? În această lecție vom studia modelul fluidului ideal și condițiile în care gazele și lichidele pot fi analizate în cadrul acestui model.

Vom considera fluidul ca fiind alcătuit dintr-un număr extrem de mare de particule ce pot fi considerate puncte materiale.

Prin curgerea unui fluid înțelegem deplasarea particulelor față de un sistem de referință. Fluidul poate fi pus în mișcare sub acțiunea greutății sale și/sau a diferențelor de presiune între diferitele puncte din interiorul său.

Reține

Numim **fluid ideal** fluidul incompresibil și lipsit de vâscozitate.

Experiența arată că un număr mare de lichide reale corespund satisfăcător modelului fluidului ideal. Atunci când efectele frecărilor interne dintre straturile de lichid sunt neglijabile în comparație cu forțele de presiune, iar vitezele de curgere sunt mici, lichide precum apa sau alcoolul pot fi modelate ca fluide ideale.

În cazul gazelor reale, la viteze reduse de curgere (mult mai mici decât viteza sunetului) și la presiuni mari, variațiile de densitate sunt reduse, iar gazele devin aproape incompresibile. Astfel, în multe situații practice, de exemplu în conductele industriale de mare presiune, gazele reale pot fi, de asemenea, modelate ca fluide ideale.

Problema fundamentală în mecanica fluidelor o constituie determinarea **distribuției presiunilor și a vitezelor în interiorul fluidului.** Dacă vitezele și presiunile nu depind de timp, ci doar de poziția în care se află particula de fluid considerată, curgerea se numește **staționară** (în regim permanent). Pentru descrierea curgerii unui fluid se folosesc liniile de curent, care indică direcția de deplasare a particulelor fluidului în fiecare punct.

Reține

Numim **linie de curent** curba care are proprietatea că **vectorii viteză** ai particulelor aflate pe ea sunt **tangenți la linia respectivă** (fig. 8.2.1).

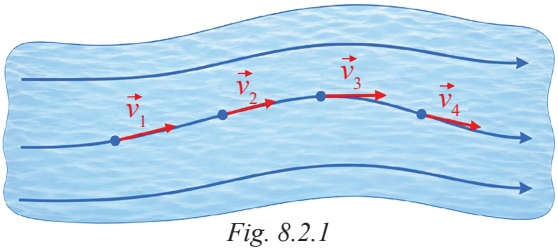
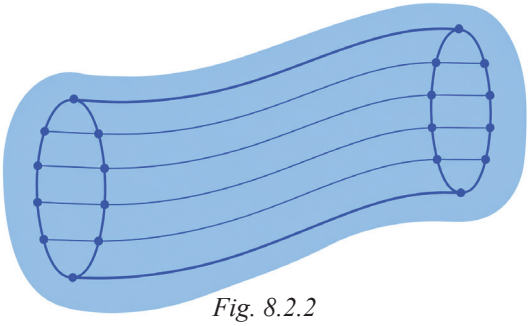


Fig. 8.2.1

În regim staționar, aspectul liniilor de curent rămâne neschimbat, acestea coincid cu traiectoriile particulelor de fluid. În acest caz, liniile de curent pot „materializa” pereții unui tub prin care curge fluidul. Dacă prin toate punctele unui contur închis ducem liniile de curent, obținem un tub de curent (fig. 8.2.2).


Fig. 8.2.2

La viteze nu prea mari, curgerea fluidelor este **laminară (în straturi paralele).** În acest caz, **liniile de curent** sunt bine determinate și **nu se intersectează între ele,** fiecare particulă de fluid rămânând in interiorul aceluiași tub de curent.

Curgerea lentă a apei unui râu liniștit de câmpie, curgerea sângelui prin vasele capilare, mișcarea lentă a aerului în apropierea suprafeței solului în condiții atmosferice calme, toate sunt exemple din natură de curgere laminară.

Dacă viteza de curgere depășește o valoare critică, regimul laminar devine instabil și trece în **regim turbulent**. Se formează vârtejuri, masa de fluid se mișcă dezordonat, iar liniile de curent dispar. Curgerea rapidă a apei unui râu de munte în apropierea stâncilor sau a cascadelor, valurile agitate ale mării în timpul vânturilor puternice și curenții atmosferici

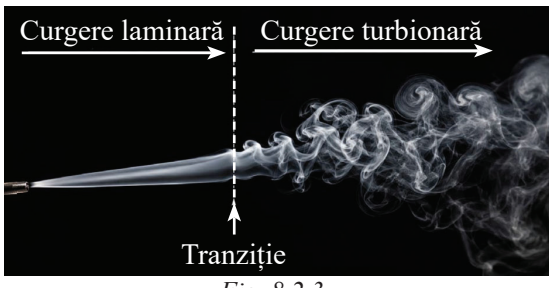


Fig. 8.2.3

din timpul furtunilor reprezintă exemple de curgere turbionară. În fig. 8.2.3 se poate observa diferența dintre curgerea laminară, cu linii de curent care nu se intersectează între ele, și curgerea turbionară, cu vârtejuri.

PENTRU CURIOȘI:

Dacă straturile unui fluid real alunecă unele față de altele, apar forțe de frecare internă (de vâscozitate). Stratul cu viteză mai mică va frâna stratul cu viteză mai mare cu care este în contact și invers, stratul cu viteză mai mare va accelera stratul cu viteză mai mică cu care este în contact. Experimentele arată că forțele de frecare internă depind de natura fluidului și de temperatură prin coeficientul de vâscozitate η.

Unitatea de măsură pentru coeficientul de vâscozitate este **Pa · s**:

$$[\eta]_{SI} = \textbf{Pa} \cdot \textbf{s}$$

Când un corp se mișcă printr-un fluid, la suprafața sa aderă un strat foarte fin de fluid, antrenat de corp. La viteze mici de curgere, în regim laminar, forța întâmpinată de corpul aflat în mișcare prin fluid este proporțională cu coeficientul de vâscozitate η și cu viteza v a corpului. Forța depinde de forma și dimensiunile transversale ale corpului. În cazul unei sfere de rază *r*:

$$F = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \qquad (8.2.1)$$

Căderea picăturilor foarte mici de ploaie printr-o atmosferă liniștită, coborârea microorganismelor în oceane și lacuri sau mișcarea globulelor de sânge foarte mici în plasmă sunt încetinite de această forță de rezistență, numită forța Stokes.

În cazul curgerii turbulente, forța de rezistență întâmpinată de corpul aflat în mișcare printr-un fluid devine proporțională cu densitatea fluidului, cu aria secțiunii transversale *S* și cu pătratul vitezei corpului (forța Newton):

$$F = \frac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho_f \cdot v^2 \qquad (8.2.2),$$

unde *C* este un coeficient care depinde de forma corpului.

Coborârea unei parașutist cu parapanta prin aer este încetinită de acțiunea acestei forțe.

APLICĂ

1. În această aplicație ne vom referi la forța de rezistență întâmpinată de un corp aflat în cădere printr-un fluid, în regim de curgere turbionară:

$$F = \frac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho_f \cdot v^2$$

a. Calculează unitatea de măsură a constantei *C*.

b. Calculează viteza limită de cădere a unui corp de masă *m* printr-un fluid de densitate ρ_f. Exprimă rezultatul în funcție de *C*, de aria transversală a corpului *A*, de masa *m* și de accelerația gravitațională *g*.

c. Această constantă este „sensibilă” la forma corpului. De exemplu, are valoarea *C* =1,32 pentru un disc și valoarea *C* = 0,04 pentru un profil aerodinamic, ambele cu același diametru transversal. În fig. 8.2.4 sunt indicate diverse profiluri și constantele *C* corespunzătoare, pentru o aceeași arie a secțiunii transversale. Calculează de câte ori este mai mare viteza limită de cădere a profilului aerodinamic, față de viteza limită de cădere a discului, considerând că masa și aria transversală sunt aceleași. Se neglijează forța arhimedică.

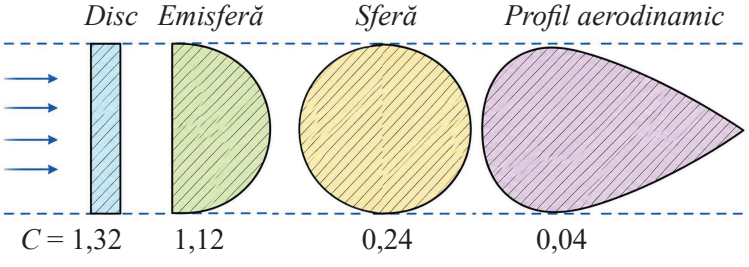


Fig. 8.2.4

Rezolvare:

a. $C = \dfrac{2F}{A \cdot \rho_f \cdot v^2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} [C]_{SI} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2 \cdot \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\left(\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} \\ \mathrm{N} = \dfrac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{array}\right\} \Rightarrow [C]_{SI} = \dfrac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \dfrac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}} = 1$

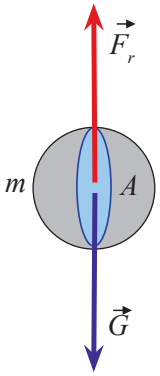


Fig. 8.2.5

b. Aplicăm principiul fundamental al mecanicii pentru corpul de masă *m* (fig. 8.2.5):

$$m \cdot \vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_r$$

Proiectăm această relație pe axa *Oy*:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot a = G - F_r \\ G = m \cdot g \\ F = \dfrac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho_f \cdot v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g - \frac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho_f \cdot v^2$$

Se observă că pe măsură ce viteza corpului crește, accelerația scade. Viteza limită se atinge pentru $a = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot a = m \cdot g - \dfrac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho_f \cdot v^2 \\ a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = m \cdot g - \frac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho_f \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g = \frac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho_f \cdot v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2m \cdot g}{C \cdot A \cdot \rho_f}} \qquad (8.2.3)$$

c. Aplicând relația 8.2.3 pentru cele două profiluri și ținând cont ca aria secțiunii transversale *A* și masele *m* sunt egale, obținem:

$$\frac{v_{pa}}{v_d} = \frac{\sqrt{\dfrac{2m \cdot g}{C_{pa} \cdot A \cdot \rho_f}}}{\sqrt{\dfrac{2m \cdot g}{C_d \cdot A \cdot \rho_f}}} = \sqrt{\frac{C_d}{C_{pa}}}$$

Înlocuind valorile numerice:

$$\frac{v_{pa}}{v_d} = \sqrt{\frac{C_d}{C_{pa}}} = \sqrt{\frac{1,32}{0,04}} \cong 5,74$$

EXERSEAZĂ

1. Se delimitează un tub de curent într-un fluid ideal.
a. Pot particulele de fluid să traverseze pereții tubului?
b. Ce proprietate au vectorii viteză pe suprafața laterală a acestuia?
2. Explică diferențele dintre curgerea laminară și curgerea turbulentă.
3. Dă exemple de:
a. curgere laminară din natură;
b. curgere turbulentă din natură.
4. Calculează viteza limită de cădere a unui corp sferic de masă *m* și rază *r* printr-un fluid în regim de curgere laminar. Se neglijează forța arhimedică. Exprimă rezultatul în funcție de coeficientul de vâscozitate η, de raza *r,* de masa *m* și de accelerația gravitațională *g*.

8.3. Debit. Ecuația de continuitate

Oare printr-o conductă cu diverse secțiuni viteza de curgere a unui fluid ideal are aceeași valoare, indiferent de aria secțiunii? Există vreo legătură între cantitatea de fluid care traversează o secțiune a conductei și intervalul de timp în care are loc această traversare? Pentru a răspunde la aceste întrebări, avem nevoie de o nouă mărime fizică ce caracterizează cantitatea de fluid care traversează secțiunea conductei în unitatea de timp.

În viața de zi cu zi întâlnim frecvent situații în care aceeași cantitate de apă curge mai repede printr-un furtun atunci când secțiunea sa se îngustează. Pentru a descrie aceste fenomene, introducem noțiunea de debit.

Reține

Numim debit masic Q_m mărimea fizică scalară egală cu masa de fluid ce traversează o secțiune transversală în unitatea de timp.

$$Q_m = \frac{m}{\Delta t},\ [Q_m]_{SI} = \frac{\text{kg}}{\text{s}} \qquad (8.3.1)$$

Reține

Numim debit volumic Q_V mărimea fizică scalară egală cu volumul de fluid ce traversează o secțiune transversală în unitatea de timp.

$$Q_V = \frac{V}{\Delta t},\ [Q_V]_{SI} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \qquad (8.3.2)$$

Să delimităm un tub de curent în interiorul unui fluid ideal aflat în curgere staționară (fig. 8.3.1). Deoarece fluidul ideal este lipsit de vâscozitate, se consideră că vitezele particulelor de-a lungul tuturor liniilor de curent ce traversează o secțiune transversală oarecare a acelui tub au aceeași valoare.

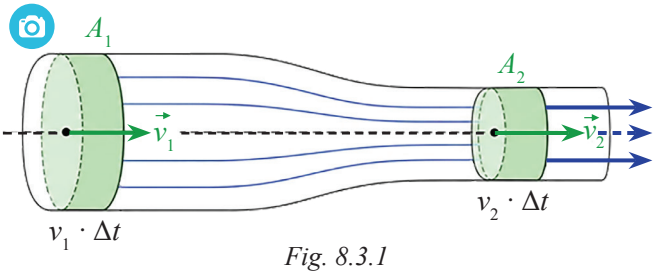


Fig. 8.3.1

Într-un interval oarecare de timp Δt, printr-o secțiune oarecare de arie A_1 fluidul curge cu viteza constantă $\vec{v}_1$. Dacă **fluidul este incompresibil**, așa cum se întâmplă în cazul **lichidelor**, printr-o altă secțiune de arie A_2, în același interval de timp Δt, va curge un volum egal, cu viteza constantă $\vec{v}_2$. Deoarece cele două volume sunt egale, și debitele volumice sunt egale:

$$\left.\begin{aligned} Q_{V1} &= \frac{V_1}{\Delta t} \\ Q_{V2} &= \frac{V_2}{\Delta t} \\ V_1 &= V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_{V1} = Q_{V2}$$

Reține

În regim staționar, **debitul volumic Q_v este același** prin orice secțiune a tubului de curent.

Debitul volumic poate fi exprimat vizualizând volumul de lichid scurs ca pe un cilindru de secțiune A_1 și lungime $v_1 \cdot \Delta t$:

$$Q_{V1} = \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t}{\Delta t} = A_1 \cdot v_1, \qquad (8.3.3)$$

În mod analog,

$$Q_{V2} = \frac{V_2}{\Delta t} = \frac{A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t}{\Delta t} = A_2 \cdot v_2 \qquad (8.3.4)$$

Cum debitele volumice sunt egale, din relațiile 8.3.3 și 8.3.4, obținem **ecuația de continuitate**:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \qquad (8.3.5)$$

Din relația 8.3.5 se poate observa că **viteza fluidului crește dacă tubul se îngustează**, deci acolo unde liniile de curent sunt mai dese, viteza de curgere este mai mare.

Ecuația de continuitate are numeroase aplicații practice. De exemplu, pentru a mări viteza jetului de apă ce iese din furtun, pompierii montează la capătul furtunului o piesă metalică îngustă, numită ajutaj, care micșorează aria secțiunii transversale a furtunului.

APLICĂ

1. Stabilește relația matematică dintre debitul volumic și debitul masic.

Rezolvare:

$$\left.\begin{aligned} Q_m &= \frac{m}{\Delta t} \\ m &= \rho \cdot V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} Q_m &= \frac{\rho \cdot V}{\Delta t} \\ Q_V &= \frac{V}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_m = \rho \cdot Q_V$$

2. O fântână arteziană cu jet vertical are debitul volumic Q_V, iar orificiul de ieșire, situat la nivelul solului, are aria A_1. Calculează aria secțiunii jetului la înălțimea h. Se neglijează frecarea cu aerul și se presupune că jetul de lichid nu se dispersează.

Rezolvare:

Viteza jetului la nivelul solului are valoarea: $Q_V = A_1 \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{Q_V}{A_1}$

Cum nu există forțe neconservative, energia mecanică se conservă. La înălțimea h, viteza jetului de apă va fi:

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_h^2}{2} + m \cdot g \cdot h \Rightarrow \left.\begin{aligned} v_h &= \sqrt{v_1^2 - 2g \cdot h} \\ v_1 &= \frac{Q_V}{A_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_h = \sqrt{\left(\frac{Q_V}{A_1}\right) - 2g \cdot h}$$

Aplicăm ecuația de continuitate pentru a calcula aria secțiunii jetului:

$$A_1 \cdot v_1 = A_h \cdot v_h \Rightarrow A_h = \frac{A_1 \cdot v_1}{v_h} = \frac{Q_V}{\sqrt{\left(\frac{Q_V}{A_1}\right)^2 - 2g \cdot h}}$$

Se observă că problema este posibilă doar dacă:

$$\left(\frac{Q_V}{A_1}\right)^2 - 2g \cdot h > 0 \Rightarrow h < \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{Q_V}{A_1}\right)^2$$

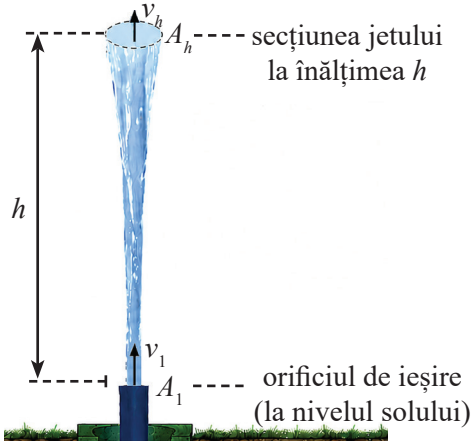


Fig. 8.3.2

EXERSEAZĂ

1. În regim staționar, debitul volumic Q_V este constant prin orice secțiune a tubului de curent. Debitul masic este și el constant?

2. Printr-o conductă cu aria secțiunii $A = 8$ cm^2 curge apă cu viteza $v = 3$ m/s. Calculează debitul volumic.

3. Pistonul unei seringi are aria secțiunii transversale $A_1 = 4$ cm^2, iar acul are aria secțiunii transversale $A_2 = 0{,}01$ cm^2. Pistonul este împins cu viteza $v_1 = 2$ cm/s. Determină valoarea vitezei cu care iese serul din ac. Serul se consideră fluid ideal.

4. Printr-o conductă cu secțiune circulară curge apă cu debitul masic $Q_m = 6{,}28$ kg/s. Viteza de curgere a apei prin conductă are valoarea $v_1 = 20$ m/s. Calculează raza secțiunii transversale a conductei. Apa se consideră fluid ideal.

8.4. Legea lui Bernoulli

Într-o conductă cu secțiune variabilă, aflată în regim de curgere staționar, viteza fluidului este constantă în timp, dar are diverse valori în dreptul secțiunilor transversale cu diverse arii ale conductei. Ce se întâmplă însă cu presiunea de-a lungul unei linii de curent? Rămâne aceasta constantă sau se modifică odată cu viteza de curgere? Studiind acest fenomen, Bernoulli a descoperit că, într-un fluid ideal aflat în regim de curgere staționar, există o legătură între presiune și viteza de curgere. Să refacem împreună, în această lecție, pașii care conduc la formularea legii lui Bernoulli.

Să considerăm un tub de curent extrem de subțire de secțiune variabilă în jurul unei linii de curent ca în fig. 8.4.1, prin care curge în **regim staționar un fluid ideal**. Într-un interval de timp extrem de mic Δt, regiunea de fluid conținut între secțiunile transversale S_1 și S_2 se deplasează din poziția $A_1B_1C_1D_1$ în poziția $A_2B_2C_2D_2$. Fluidul ideal fiind incompresibil, procesul poate fi interpretat ca și cum în intervalul de timp considerat o masă foarte mică m de fluid este transferată direct din regiunea $A_1B_1A_2B_2$ în regiunea $C_1D_1C_2D_2$, fără ca fluidul intermediar să se fi deplasat. Pentru cele două regiuni vitezele $\vec{v}_1$ și, respectiv, $\vec{v}_2$ pot fi considerate, practic, constante.

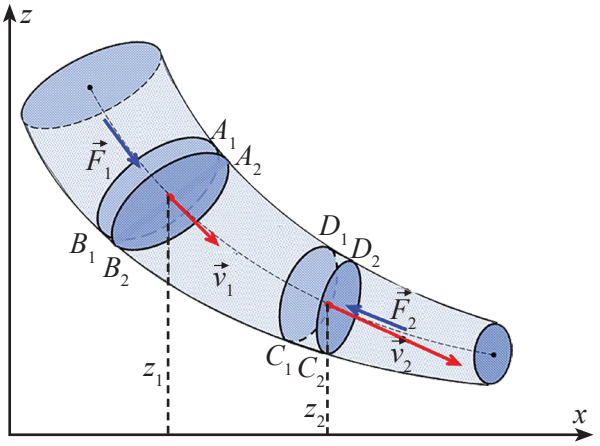


Fig. 8.4.1

Transferul masei m are loc sub acțiunea forțelor de presiune $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ din partea fluidului din exterior, care efectuează lucrul mecanic:

$$L_1 = F_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t_1 \cdot \cos 0° = F_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t_1$$
$$L_2 = F_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t_2 \cdot \cos 180° = -F_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t_2 \qquad (8.4.1)$$

Variația energiei potențiale gravitaționale a masei m este:

$$L_G = m \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \qquad (8.4.2)$$

Aplicăm teorema de variație a energiei mecanice pentru masa de fluid m:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta E_c + \Delta E_p = L_{\text{forțelor de presiune}} \\ &\Delta E_c = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} \\ &\Delta E_p = m \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \\ &L_{\text{forțelor de presiune}} = F_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t_1 - F_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = F_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - F_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \\ &F_1 = p_1 \cdot S_1 \\ &F_2 = p_2 \cdot S_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m \cdot g \cdot z_2 - m \cdot g \cdot z_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - p_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \qquad (8.4.3)$$

Conform ecuației de continuitate:

$$S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t = V \qquad (8.4.4)$$

Împărțind relația 8.4.3 la volumul V, obținem:

$$\frac{\rho \cdot v_2^2}{2} - \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2 - \rho \cdot g \cdot z_1 = p_1 - p_2 \qquad (8.4.5)$$

Rescriem ecuația (8.4.5) sub forma:

$$\frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 \qquad (8.4.6)$$

Relația 8.4.6 este ecuația lui Bernoulli.



Fig. 8.4.2. Daniel Bernoulli (1700-1782)

Reține

De-a lungul unei linii de curent**, pentru un fluid ideal în regim de curgere staționar:**

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + p + \rho \cdot g \cdot z = \text{const.} \qquad (8.4.7)$$

Termenii din legea lui Bernoulli au toți **dimensiune de presiune**: $p_d = \frac{\rho \cdot v^2}{2}$ se numește **presiune dinamică** și se datorează energiei cinetice a fluidului, fiind egală cu energia cinetică a unității de volum. Presiunea $p_z = \rho \cdot g \cdot z$ este **presiunea de poziție**, fiind egală cu energia potențială a unității de volum. Presiunea p este **presiunea statică** și se datorează acțiunii forțelor externe asupra fluidului.

Constanta din ecuația 8.4.7 este independentă de timp și are o valoare bine precizată pentru fiecare linie de curent.

Reține

Legea lui Bernoulli: De-a lungul unei linii de curent, în regim de curgere staționar, **presiunea totală a unui fluid ideal este constantă.** Această **constantă** are aceeași valoare de-a lungul unei linii de curent și este independentă de timp.

Reține

Pentru conducte orizontale (fig. 8.4.3), ecuația lui Bernoulli devine:

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + p = \text{const.} \qquad (8.4.8)$$

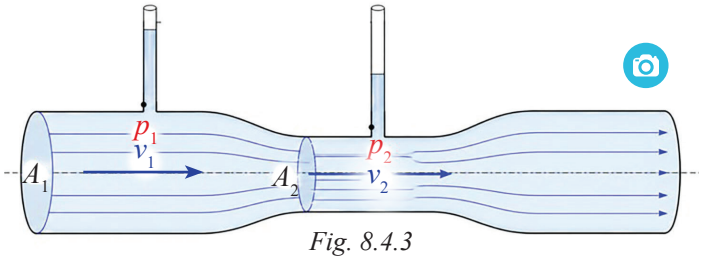


Fig. 8.4.3

Legea lui Bernoulli are numeroase aplicații practice în aeronautică, în medicină (cardiologie – în vasele de sânge îngustate, viteza sângelui crește, presiunea locală scade), industrie etc.

APLICĂ

1. Un rezervor cilindric de apă (considerată fluid ideal) prezintă un orificiu cu secțiunea transversală de arie A_2, foarte mică în raport cu aria A_1 a bazei rezervorului. Orificiul este construit pentru a ghida curgerea (fig. 8.4.4). Calculează viteza de curgere a apei prin orificiu. Nivelul apei din rezervor în raport cu orificiul se menține constant la valoarea h = 1,8 m. Se cunoaște g = 10 m/s^2.

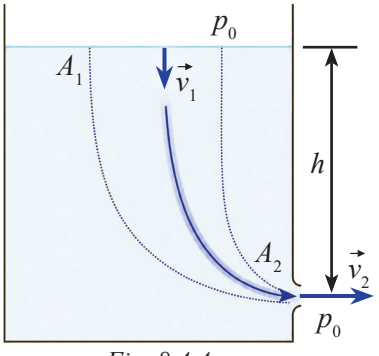


Fig. 8.4.4

Notăm cu p_0 presiunea atmosferică și cu v_1, v_2 vitezele lichidului la nivelul superior al vasului, respectiv, la nivelul orificiului.

La nivelul superior avem presiune statică p_0, presiune dinamică și presiune de poziție; la nivelul inferior avem doar presiune statică p_0 și presiune dinamică. Din legea lui Bernoulli și din ecuația de continuitate scrise pentru linia de curent marcată în fig. 8.4.4, obținem viteza v_2:

$$\left.\begin{aligned} p_0 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h &= p_0 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \\ A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 &\Rightarrow v_1 = \frac{A_2 \cdot v_2}{A_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{A_2 \cdot v_2}{A_1}\right)^2}{2} + g \cdot h = \frac{v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{2g \cdot h}}{\sqrt{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}}} \qquad (8.4.9)$$

Deoarece $A_2 << A_1$, în relația 8.4.9 putem neglija termenul $\frac{A_2^2}{A_1^2}$, obținând:

$$v_2 = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}8} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}.$$

Observație: $v = \sqrt{2g \cdot h}$ se numește **formula lui Torricelli**; viteza de scurgere coincide cu viteza particulelor în cădere liberă.

2. Tubul Pitot este folosit pentru măsurarea vitezei avioanelor față de aer. În partea din fața avionului se află un mic tub orientat în direcția de zbor, care „oprește" aerul și măsoară presiunea totală. Pe lateralele avionului există orificii care permit măsurarea presiunii statice. Diferența dintre presiunea totală și cea statică este presiunea dinamică (presiunea de poziție este nulă).

În fig. 8.4.5 este reprezentată schema simplificată a unui tub Pitot utilizat la determinarea vitezei de zbor (față de aer) a unui avion. Diferența de nivel dintre cele două brațe ale manometrului este h = 0, 1 m. Calculează viteza avionului față de aer, știind că densitatea mercurului este $\rho_{Hg} = 13600 \frac{kg}{m^3}$, densitatea aerului atmosferic la înălțimea la care zboară avionul este $\rho = 1{,}2 \frac{kg}{m^3}$, iar accelerația gravitațională are valoarea $g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$.

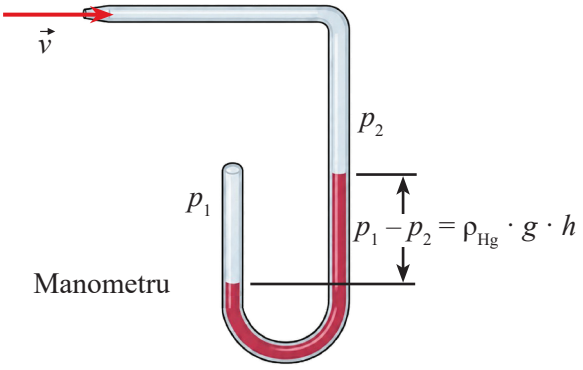


Fig. 8.4.5

Rezolvare:

Conform legii lui Bernoulli:

$$p_1 = \frac{\rho \cdot v^2}{2} + p_2 \qquad (8.4.10)$$

Manometrul cu mercur măsoară diferența dintre presiunile p_1 și p_2:

$$p_1 = p_2 + \rho_m \cdot g \cdot h \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho_m \cdot g \cdot h \qquad (8.4.11)$$

Înlocuind relația 8.14.11 în relația 8.4.10 și efectuând calculele numerice, obținem:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\rho \cdot v^2}{2} + p_2 \\ p_1 - p_2 &= \rho_m \cdot g \cdot h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\rho \cdot v^2}{2} = \rho_m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\rho_m \cdot g \cdot h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 13600 \cdot 0{,}1 \cdot 9.8}{1{,}2}} \frac{m}{s} \cong 149 \frac{m}{s}.$$

3. Într-o conductă orizontală prin care circulă apă ($\rho = 1000$ kg/m^3) se montează un tub Venturi (fig. 8.4.6). Raza secțiunii mari (intrarea) este $r_1 = 0{,}050$ m, iar raza secțiunii îngustate este $r_2 = 0{,}025$ m. Diferența de presiune măsurată între cele două secțiuni $p_1 - p_2 = 1500$ Pa. Calculează debitul volumic al apei prin conductă, presupunând că apa este fluid ideal și că nu există pierderi de energie.

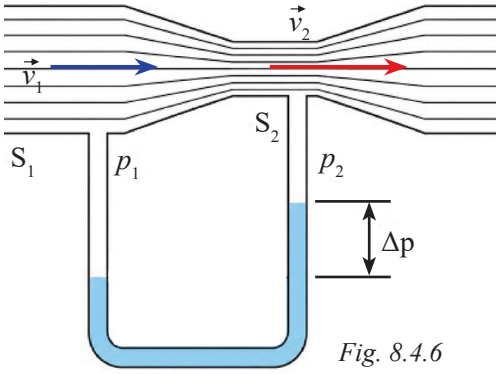


Fig. 8.4.6

Rezolvare:

Debitul volumic al lichidului care circulă prin tub este:

$$\left.\begin{aligned} Q_V &= S_1 \cdot v_1 \\ S_1 &= \pi \cdot r_1^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_V = \pi \cdot r_1^2 \cdot v_1 \qquad (8.4.12)$$

Pentru a determina viteza de curgere, aplicăm ecuația de continuitate și Legea lui Bernoulli:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}$$

Ariile secțiunilor transversale pot fi exprimate în funcție de razele tuburilor. Cu observația că $r_1 = 2r_2$, din ecuația de continuitate, obținem o relație între cele două viteze:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \pi \cdot r_1^2 \\ S_2 &= \pi \cdot r_2^2 \\ r_1 &= 2r_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} S_1 &= 4S_2 \\ S_1 \cdot v_1 &= S_2 \cdot v_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_2 = 4v_1 \qquad (8.4.13)$$

Înlocuind relația (8.4.13) în ecuația lui Bernoulli, obținem:

$$\left.\begin{aligned} p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} &= p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \\ v_2 &= 4v_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot (4v_1)^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{15\rho}}$$

Pentru a obține valoarea debitului, înlocuim această expresie în relația 8.4.12 și efectuăm calculele numerice:

$$\left.\begin{aligned} Q_V &= \pi \cdot r_1^2 \cdot v_1 \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{15\rho}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_V = \pi \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{15\rho}} = 3{,}14 \cdot (5 \cdot 10)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 1500}{15 \cdot 1000}} \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cong 3{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

4. Diferența presiunilor statice a două puncte dintr-o conductă orizontală (folosită pentru alimentarea urbană), de secțiune variabilă, este $\Delta p = 62$ kN/m^2. Cunoscând că debitul volumic al fluidului din conductă este $Q_V = 2{,}4$ m^3/h, calculează lucrul mecanic efectuat de forțele de presiune exercitate de fluidul din conductă între cele două puncte, în timp de 10 minute. Fluidul se consideră ideal și nu sunt pierderi de energie prin frecare.

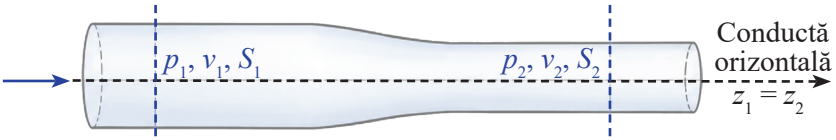


Fig. 8.4.7

Rezolvare:

Considerăm pentru început că intervalul de timp este extrem de scurt, astfel încât volumul de fluid transportat să se poată exprima (fig. 8.4.7):

$$V = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \qquad (8.4.14)$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele externe în acest caz este:

$$L = F_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t \cdot \cos 0^\circ + F_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \cdot \cos 180^\circ \qquad (8.4.15)$$

Din relațiile (8.4.14 și 8.4.15), obținem:

$$L = F_1 \frac{V}{S_1} - F_2 \frac{V}{S_2} = V(p_1 - p_2)$$

Această relație este independentă de durata Δt, deci, pentru orice interval de timp oricât de mare, putem scrie:

$$L = \Delta p \cdot V \qquad (8.4.16)$$

Exprimăm volumul de fluid în funcție de debitul volumic:

$$V = Q_V \cdot \Delta t$$

Înlocuind această relație în relația 8.4.16, obținem:

$$\left.\begin{aligned} L &= \Delta p \cdot V \\ V &= Q_V \cdot \Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = \Delta p \cdot Q_V \cdot \Delta t$$

Transformăm unitățile de măsură în unități de măsură din SI:

$$\Delta p = 62 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 62000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$Q_V = 2{,}4 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = \frac{2{,}4\ \text{m}^3}{60 \cdot 60\ \text{s}}$$

$$t = 10\,\text{min} = 10 \cdot 60\ \text{s}$$

Efectuam calculele numerice:

$$L = \Delta p \cdot Q_V \cdot \Delta t = 4200 \cdot \frac{2{,}4}{60 \cdot 60} \cdot 10 \cdot 60\ \text{J} \cong 24800\ \text{J}.$$

EXERSEAZĂ

1. Uneori, în timpul furtunilor, acoperișurile caselor sunt smulse de vânt. Explică acest fenomen.

2. Printr-un tub orizontal cu secțiune variabilă se deplasează un lichid (considerat fluid ideal) cu vitezele $v_1 = 2$ m/s, respectiv, $v_2 = 4$ m/s. Alege afirmațiile corecte:

A. Între ariile celor două secțiuni există relația:

a. $A_1 > A_2$ b. $A_1 = A_2$ c. $A_1 = 2A_2$ d. $A_2 = 2A_1$

B. Între presiunile dinamice corespunzătoare celor două viteze există relația:

a. $p_{d1} = 2p_{d2}$ b. $p_{d1} = 4p_{d2}$ c. $p_{d2} = 2p_{d1}$ d. $p_{d2} = 4p_{d1}$

C. Între presiunile statice corespunzătoare celor două secțiuni există relația:

a. $p_{s1} > p_{s2}$ b. $p_{s1} = p_{s2}$ c. $p_{s2} > 2p_{s1}$ d. $p_{s1} < p_{s2}$

3. Printr-o conductă curge un fluid (considerat fluid ideal) cu viteza v = 3 m/s. Densitatea fluidului este $\rho = 800$ kg/m^3. Calculează presiunea dinamică a fluidului.

4. Printr-o conductă orizontală curge apă cu viteza $v_1 = 2$ m/s. Într-o porțiune mai îngustă a conductei, viteza apei (considerată fluid ideal) devine $v_2 = 5$ m/s. Calculează diferența dintre presiunile statice din cele două secțiuni (densitatea apei are valoarea $\rho = 1000$ kg/m^3).

5. Calculează debitul volumic dintr-o conductă cu secțiune variabilă prin care circulă apă, dacă tubul Venturi aplicat la două secțiuni de arii diferite ale conductei, $A_1 = 0{,}2$ m^2 și $A_2 = 0{,}1$ m^2, indică o diferență de presiune $\Delta p = 10^3$ N/m^2 (densitatea apei, considerată fluid ideal, are valoarea $\rho = 1000$ kg/m^3).

6. Pentru a determina viteza unui avion față de aer, se montează pe avion un tub Pitot (fig. 8.4.5). Tubul Pitot măsoară presiunea totală a aerului, înregistrând o diferență de nivel $\Delta h = 13$ cm a lichidului ($\rho = 800$ kg/m^3) din tubul manometric. Calculează viteza avionului față de aer ($g = 10$ m/s^2), dacă densitatea aerului este $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3.

INVESTIGHEAZĂ!

Ține vertical două coli de hârtie apropiate și suflă între ele. Descrie și explică fenomenul observat.

8.5. Aplicații practice

Cum funcționează un lift hidraulic? Cum poate o minge de fotbal șutată spre poarta „cu efect” să-și schimbe traiectoria în aer, să păcălească portarul și să intre în poartă, deși inițial nu este șutată chiar pe spațiul porții?

Cum reușesc avioanele, deși foarte grele, să se mențină în aer?

Toate aceste fenomene au ceva în comun: ele pot fi explicate cu ajutorul proprietăților fluidelor. În această lecție vom studia câteva aplicații practice ale fluidelor.

Presa hidraulică

O aplicație a **Legii lui Pascal** este **presa hidraulică,** a cărei schemă de funcționare este prezentată în fig. 8.5.1. Pistonul a cărui secțiune transversală are aria A_1 este utilizat pentru a exercita forța F_1 asupra unui lichid. **Conform legii lui Pascal**, presiunea $p_1 = F_1/A_1$ este transmisă prin tubul de legătură, cu aceeași intensitate, către cilindrul de secțiune mai mare, A_2. Ca urmare, asupra pistonului 2 se va exercita o forță $F_2 = p_2 \cdot A_2$:

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad (8.5.1)$$

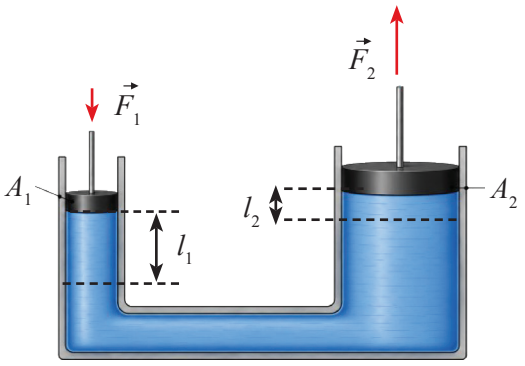


Fig. 8.5.1

Din relația 8.5.1 se observă că $F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$

Reține

Presa hidraulică este un dispozitiv de amplificare a forței cu un factor de multiplicare egal cu raportul dintre ariile celor două pistoane:

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

Prin coborârea pistonului de arie A_1, lichidul va coborî în ramura respectivă pe distanța l_1. În ramura a cărei secțiune transversală are aria A_2 pistonul 2 va urca pe distanța l_2. Cum lichidul este incompresibil, putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ V_1 &= A_1 \cdot l_1 \\ V_2 &= A_2 \cdot l_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1 \cdot l_1 = A_2 \cdot l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{l_2}{l_1} \qquad (8.5.2)$$

Înlocuind relația 8.5.1 în relația 8.5.2, obținem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_1}{F_2} &= \frac{A_1}{A_2} \\ \frac{A_1}{A_2} &= \frac{l_2}{l_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Reține

În cazul neglijării forței de frecare dintre pistoane și vas, **deplasările pistoanelor sunt invers proporționale cu forțele exercitate asupra lor:** $\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$.

Presa hidraulică este folosită în industria metalurgică pentru presarea metalelor, în industria alimentară pentru extragerea uleiului din diferite semințe și în industria reciclării pentru compactarea deșeurilor.

Cricurile hidraulice, folosite în service-urile auto**, lifturile hidraulice** (fig. 8.5.2), **frânele hidraulice** (fig. 8.5.3) și **fântânile arteziene** sunt câteva dintre dispozitivele care utilizează principiul de funcționare a presei hidraulice.

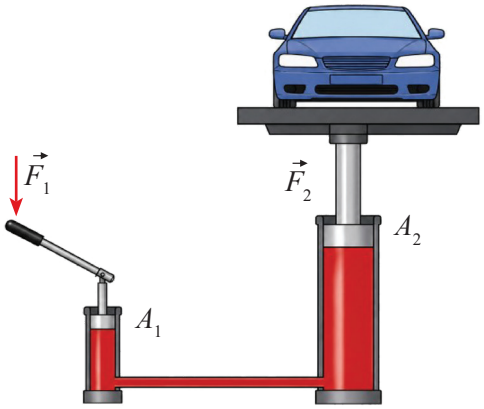


Fig. 8.5.2

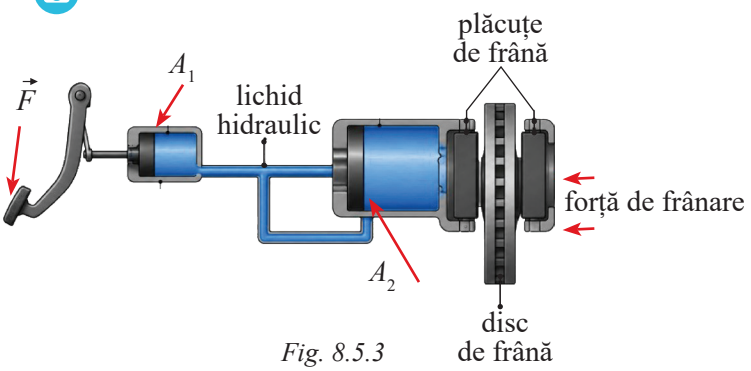


Fig. 8.5.3

Mașinile și majoritatea avioanelor utilizează **sisteme hidraulice pentru frânare** (fig. 8.5.3). Tot pe principiul presei hidraulice se bazează și construcția, precum și funcționarea sistemelor de transmitere a forței **la excavatoarele hidraulice.**

Înțelegerea efectelor **presiunii atmosferice** a făcut posibilă realizarea costumelor spațiale care le permit astronauților să lucreze în spațiul cosmic.

Legea lui Arhimede are, de asemenea, numeroase aplicații în viața cotidiană:

a. **transportul naval**

Vapoarele și navele maritime dislocă un volum foarte mare de apă și plutesc sub acțiunea forței arhimedice și a greutății lor:

$$\vec{F}_A + \vec{G} = 0 \Rightarrow F_A = G$$

Pentru ca plutirea unei nave să fie **stabilă,** centrul de greutate și centrul de presiune trebuie să se afle pe aceeași verticală. În timpul furtunilor, navele se înclină, dar cuplul de forțe format din greutatea navei și forța arhimedică poate să readucă nava în poziție verticală dacă direcția forței arhimedice intersectează axa verticală de simetrie a navei într-un punct numit **metacentru *M*** (fig. 8.5.4), situat deasupra centrului de greutate al navei. De aceea, încărcătura vapoarelor este așezată cât mai aproape de fundul navei, pentru a coborî centrul de greutate și a crește stabilitatea.

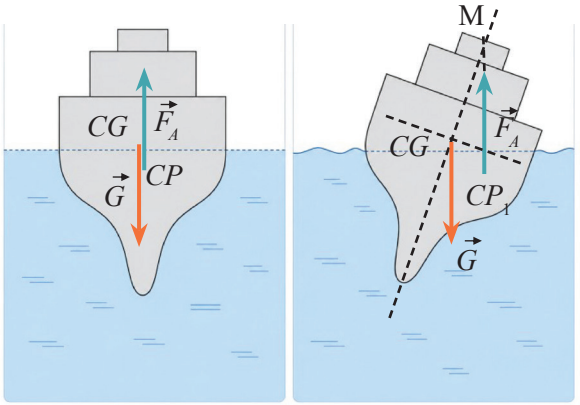


Fig. 8.5.4

b**. densimetrie**

Densimetrul este un instrument folosit pentru determinarea densității lichidelor. Așa cum se poate observa în fig. 8.5.5, densimetrul este alcătuit dintr-un corp de sticlă (tub sau balon), prelungit cu o tijă subțire. Pentru ca tubul din sticlă să-și mențină poziția verticală stabilă, în partea de jos a acestuia se află mercur sau alice de plumb. Densimetrele se folosesc în industria alimentară pentru verificarea concentrației zahărului în sucuri, vin sau lapte, în industria petrolieră pentru controlul densității combustibililor și uleiurilor etc.



Fig. 8.5.5

c**. inginerie**

Platformele petroliere marine, docurile plutitoare, macarale plutitoare și platformele pentru construcții maritime plutesc sub acțiunea greutății și forței arhimedice, aflate în echilibru. Structurile acestora sunt proiectate astfel încât volumul scufundat să asigure o forță arhimedică suficient de mare pentru a echilibra greutatea platformei. Centrul de greutate trebuie să fie cât mai jos astfel încât platforma să nu se răstoarne sub acțiunea valurilor și a vântului.

d. **medicină**

În medicina sportivă, masa musculară mare a sportivilor poate fi calculată în felul următor: sportivul este cântărit în aer, apoi este scufundat într-un bazin cu apă. Diferența dintre greutatea corpului în aer, G, și greutatea aparentă în apă, G_a, permite calcularea volumului sportivului:

$$\left.\begin{aligned} G_a &= G - F_A \\ F_A &= \rho_a \cdot V_C \cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow G_a = G - \rho_a \cdot V_C \cdot g \Rightarrow V_C = \frac{G - G_a}{\rho_a \cdot g}$$

Cunoscând volumul și masa persoanei, se determină densitatea corporală $\left(\rho_C = \frac{m}{V_C}\right)$, apoi procentul de masă musculară.

În fizioterapie, pacienții fac exerciții în apă deoarece corpul „devine mai ușor" datorită forței arhimedice. Astfel, articulațiile sunt mai puțin solicitate, iar recuperarea după accidente sau operații este mai ușoară.

Toate aceste exemple sunt aplicații ale **staticii fluidelor.**

Dinamica fluidelor are, la rândul ei, numeroase aplicații în viața cotidiană:

a. **Aviație**

Aripile avioanelor sunt proiectate astfel încât aerul să circule cu viteze diferite deasupra și dedesubtul lor. Datorită formei aripii, viteza de curgere a fluidului este mai mare în zona în care liniile de curent sunt mai dese (fig. 8.5.6). Astfel, **presiunea statică este mai mică** în regiunile în care **viteza fluidului (și deci presiunea dinamică) este mai mare**. Din cauza diferenței de presiune apare o forță portantă: aripa este împinsă transversal dinspre regiunea cu presiune mai mare spre regiunea cu presiune mai mică, adică dinspre zona cu linii de curent mai rare spre zona cu linii de curent mai dese.

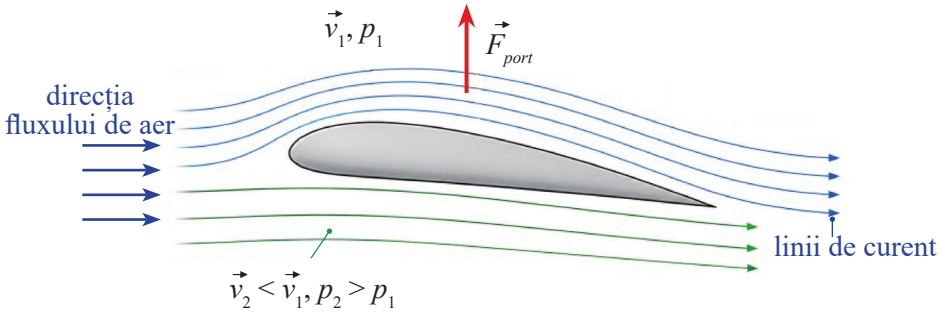


Fig. 8.5.6

b. **Sectorul de alimentare cu apă și canalizare**

Circulația apei prin conducte se realizează datorită diferențelor de presiune dintre diferite puncte ale sistemului. Principiile din dinamica fluidelor sunt aplicate în proiectarea rețelelor de alimentare cu apă, a sistemelor de irigații, a instalațiilor sanitare și a altor sisteme hidraulice. În proiectarea conductelor destinate transportului fluidelor trebuie luată în considerare relația dintre viteza de curgere și presiunea exercitată asupra pereților conductei. O scădere a vitezei de curgere determină creșterea presiunii statice a fluidului, conform principiilor din dinamica fluidelor. Prin urmare, proiectarea conductelor trebuie realizată în concordanță cu legile care guvernează mișcarea fluidelor, pentru a asigura funcționarea eficientă și sigură a sistemului.

c. **Medicină**

Circulația sângelui prin vase reprezintă o aplicație importantă a dinamicii fluidelor. Studierea vitezei și presiunii sângelui ajută la diagnosticarea unor boli cardiovasculare.

d. **Meteorologie:**

– mișcarea maselor de aer din atmosferă determină formarea vânturilor, apariția furtunilor;
– circulația curenților atmosferici.

e. **Sport**

O aplicație interesantă a dinamicii fluidelor este **efectul Magnus.**

Dacă ești pasionat de jocurile cu mingea, ai observat poate că atunci când unei mingi i se imprimă, pe lângă mișcarea de translație, și o mișcare de rotație, traiectoria mingii se curbează. Pentru a explica fenomenul fizic

„responsabil” de curbarea traiectoriei, să ne imaginăm o sferă plasată într-un fluid aflat în regim de curgere laminară. Imprimând sferei o mișcare de rotație, sfera va antrena în mișcare straturile de fluid din vecinătatea sa. În punctul A, viteza fluidului va deveni mai mare decât în punctul B, deoarece în A viteza de curgere față de sferă (viteza relativă) se adună cu viteza de rotație (viteza de transport) a sferei. În punctul B, cele două viteze se scad (fig. 8..5.7.).

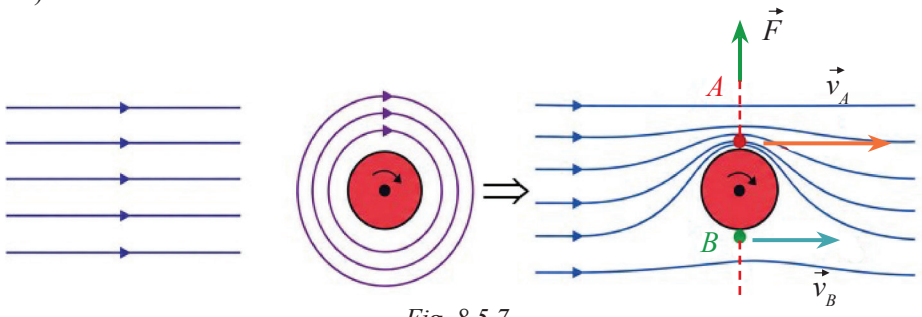


Fig. 8.5.7

Similar cu cazul forței portante care susține aripa avionului, sfera este împinsă transversal din regiunea cu linii de curent rare spre regiunea cu linii de curent dese, iar traiectoria dreaptă a mingii se curbează sub acțiunea acestei forțe.

Fenomenul poate fi observat, de exemplu, la meciurile de fotbal, când fotbalistul șutează „cu efect”.

APLICĂ

1. Într-un service auto, un ascensor hidraulic este utilizat pentru ridicarea automobilelor în vederea efectuării reparațiilor (fig. 8.5.2). Pistonul principal al ascensorului are aria secțiunii de $A = 0{,}2\ \text{m}^2$. Determină presiunea minimă care trebuie exercitată asupra lichidului hidraulic pentru a ridica un automobil cu masa $m = 900$ kg. Se consideră accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Rezolvare:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{900 \cdot 10}{0{,}2}\ \text{Pa} = 45\ \text{kPa}.$$

2. O presă hidraulică (fig. 8.1) este acționată cu o putere medie $P_1 = 40$ W. Raportul ariilor suprafețelor pistoanelor egal cu $k = A_2/A_1 = 100$. Instalația funcționează cu randamentul 80%. La o singură apăsare, pistonul mic coboară cu $l_1 = 10$ cm. Dacă $F_2 = 5000$ N, iar lucrul mecanic util este $L_2 = 600$ J, calculează:

a. intervalul de timp în care se efectuează lucrul mecanic util;

b. numărul de apăsări în unitatea de timp (v) efectuat asupra pistonului mic.

Rezolvare:

a. Randamentul de funcționare al presei hidraulice este:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{L_u}{L_c} \\ L_u &= L_2 \\ L_c &= P_1 \cdot \Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{L_2}{P_1 \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{L_2}{P_1 \cdot \eta} = \frac{600}{40 \cdot 0{,}8} = 18{,}75\ \text{s}$$

b. Să presupunem că în timpul $\Delta t'$, apăsându-se de N ori pe pistonul mic, acesta va coborî pe distanța l_1':

$$\left.\begin{aligned}\frac{l_1'}{l_1} &= N\\ \frac{N}{\Delta t} &= \nu\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{l_1'}{\Delta t} = \nu \cdot l_1$$

Așa cum am văzut, putem exprima randamentul presei astfel:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \frac{L_2}{L_1}\\ L_2 &= F_2 \cdot l_2'\\ L_1 &= P_1 \cdot \Delta t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{F_2 \cdot l_2'}{P_1 \cdot \Delta t} \qquad (8.5.3)$$

Deoarece lichidul este incompresibil, putem scrie: $l_1' \cdot A_1 = l_2' \cdot A_2 \Rightarrow l_2' = \frac{l_1' \cdot A_1}{A_2} = \frac{l_1'}{k}$.
Revenind în relația 8.5.3, obținem:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \frac{F_2 \cdot l_2'}{P_1 \cdot \Delta t}\\ l_2' &= \frac{l_1'}{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{F_2 \cdot l_1'}{k \cdot P_1 \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\frac{l_1'}{\Delta t} &= \frac{\eta \cdot k \cdot P_1}{F_2}\\ \frac{l_1'}{\Delta t} &= \nu \cdot l_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nu = \frac{\eta \cdot k \cdot P_1}{F_2 \cdot l_1} = \frac{0{,}8 \cdot 100 \cdot 40}{5000 \cdot 0{,}2}\ \text{s}^{-1} = 3{,}2\ \text{s}^{-1}$$

3. Un densimetru are volumul tubului de sticlă V de două ori mai mare decât volumul tijei V_t. Introducând densimetrul într-un vas cu apă, acesta plutește în poziție verticală, având scufundată o treime din lungimea tijei. Calculează:

a. densitatea minimă ce poate fi măsurată cu acest densimetru.

b. densitatea maximă ce poate fi măsurată folosind densimetrul.

Exprimă rezultatele în funcție de densitatea apei ρ_a.

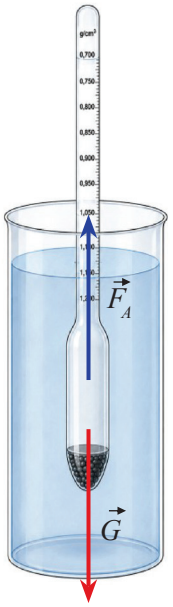


Fig. 8.5.8

Rezolvare:

Densimetrul plutește în poziție verticală sub acțiunea greutății și a forței arhimedice (fig. 8.5.8):

$$\vec{F}_A + \vec{G} = 0 \Rightarrow F_A - G = 0 \Rightarrow F_A = G \qquad (8.5.4)$$

Exprimăm forța arhimedică:

$$\left.\begin{aligned}F_A &= \rho_a \left(V + \frac{1}{3}V_t\right) g\\ V &= 2V_t\end{aligned}\right\} \Rightarrow F_A = \rho_a \left(2V_t + \frac{1}{3}V_t\right) g \Rightarrow F_A = \frac{7}{3}\rho_a \cdot V_t \cdot g$$

Revenind în relația 8.5.4, obținem:

$$\frac{7}{3}\rho_a \cdot V_t \cdot g = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{7}{3}\rho_a \cdot V_t \qquad (8.5.5)$$

Densitatea minimă ce poate fi măsurată cu acest densimetru se calculează pentru cazul în care **tija este scufundată total în lichid**, având capătul superior imediat sub suprafața liberă a lichidului:

$$\left.\begin{aligned} F_{A1} &= \rho_{\min}\left(V + V_t\right)g \\ V &= 2V_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{A1} = \rho_{\min}\left(2V_t + V_t\right)g \Rightarrow F_{A1} = 3\rho_{\min}\cdot V_t \cdot g \qquad (8.5.6)$$

Densimetrul plutește în poziție verticală sub acțiunea greutății și a forței arhimedice:

$$\vec{F}_{A1} + \vec{G} = 0 \Rightarrow F_{A1} - G = 0 \Rightarrow F_{A1} = G \qquad (8.5.7)$$

Înlocuind relațiile 8.5.5 și 8.5.6 în relația 8.5.7, obținem densitatea minimă ce poate fi măsurată cu acest densimetru:

$$\left.\begin{aligned} F_{A1} &= G \\ F_{A1} &= 3\rho_{\min}\cdot V_t \cdot g \\ G &= \frac{7}{3}\rho_a \cdot V_t \cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3\rho_{\min}\cdot V_t \cdot g = \frac{7}{3}\rho_a \cdot V_t \cdot g \Rightarrow \rho_{\min} = \frac{7}{9}\rho_a$$

Densitatea maximă ce poate fi măsurată se calculează pentru cazul în care în lichid se află **numai tubul de sticlă**. Pentru a determina densitatea maximă, procedăm în mod analog ca la subpunctul anterior:

$$\vec{F}_{A2} + \vec{G} = 0 \Rightarrow F_{A2} - G = 0 \Rightarrow F_{A2} = G$$

$$\left.\begin{aligned} F_{A2} &= \rho_{\max}\cdot V \cdot g \\ V &= 2V_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{A1} = 2\rho_{\max}\cdot V_t \cdot g \Rightarrow F_{A1} = 2\rho_{\max}\cdot V_t \cdot g$$

$$\left.\begin{aligned} F_{A1} &= G \\ F_{A1} &= 2\rho_{\max}\cdot V_t \cdot g \\ G &= \frac{7}{3}\rho_a \cdot V_t \cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\rho_{\max}\cdot V_t \cdot g = \frac{7}{3}\rho_a \cdot V_t \cdot g \Rightarrow \rho_{\max} = \frac{7}{6}\rho_a$$

EXERSEAZĂ

1. Explică avantajele efectuării exercițiilor în apă în cadrul ședințelor de fizioterapie.

Indicație: În argumentarea răspunsului, utilizează noțiunea de forță arhimedică.

2. Submarinul și batiscaful plutesc în apă deoarece forța arhimedică poate echilibra greutatea lor. Submarinele sunt prevăzute cu rezervoare laterale care se umplu cu apă atunci când submarinul trebuie să se scufunde și se golesc, cu ajutorul aerului comprimat, atunci când submarinul trebuie să revină la suprafață. Explică necesitatea acestor manevre.

3. Apa curge printr-o conductă care se îngustează. Viteza ei va crește sau va scădea?

4. Anumite tipuri de pești (cei cu schelet osos) „ascultă” de Legea lui Arhimede când urcă la suprafața apei sau când coboară în adânc. Explică de ce pentru a urca, peștii își umplu „vezica de înot” cu gaze.

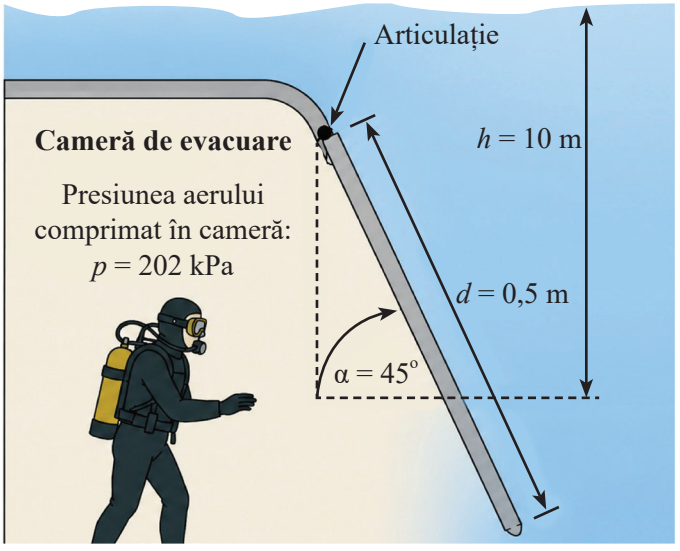
5. La o presă hidraulică, presiunea în lichidul hidraulic atinge în timpul funcționării valoarea $p = 5$ MPa. Ce lucru mecanic se efectuează la o singură apăsare, dacă din cilindrul mic al presei trec 50 cm^3 de ulei în cilindrul mare? Presa funcționează cu randament 100%.

6. Într-un service auto, un mecanic folosește o presă hidraulică pentru a ridica un automobil cu masa $m = 1200$ kg. Aria pistonului mare este $S = 0{,}24$ m^2, iar a pistonului mic este $s = 0{,}008$ m^2. Calculează:

a. Forța ce trebuie exercitată asupra pistonului mic pentru a ridica automobilul.

b. De câte ori este amplificată forța de către presă.

7. Un submarin se află la adâncimea h = 10 m sub nivelul mării. Pentru ca un scafandru să iasă din submarin în mare, el intră inițial într-o cameră de evacuare, prevăzută cu un capac metalic circular, având masa m = 5 kg și diametrul d = 0,5 m. Capacul este înclinat față de orizontală cu unghiul $\alpha = 45°$ și este articulat la partea sa superioară. Dacă în camera de evacuare se află aer comprimat la presiunea p = 202 kPa, calculează forța minimă cu care trebuie împins capacul de la partea sa inferioară, de jos în sus, astfel ca el să se deschidă. Se cunosc densitatea apei de mare $\rho_a = 1030 \frac{kg}{m^3}$ presiunea atmosferică p_0 = 101 kPa și accelerația gravitațională g = 10 N/kg (figura nu este reprezentată la scară).



8. Redactează un eseu în care să prezinți rolul și aplicațiile mecanicii fluidelor în viața cotidiană. În argumentare, utilizează legi fizice, relații matematice și un limbaj specific fizicii.

EXPERIMENTEAZĂ: Determinarea debitului volumic al aerului folosind tubul Venturi

Scopul lucrării: determinarea debitului volumic al aerului folosind tubul Venturi.

Teoria lucrării:

Debitul volumic al unui fluid poate fi exprimat în funcţie de viteza de curgere printr-o secţiune şi de diametrul secţiunii respective:

$$\left.\begin{aligned} Q_V &= A \cdot v \\ A_1 &= \pi \cdot r^2 \\ r &= \frac{d}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_V = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot v$$

Pentru determinarea vitezei de curgere a fluidului, considerat fluid ideal cu densitatea ρ, aplicăm ecuaţia de continuitate şi ecuaţia lui Bernoulli pentru particulele aflate pe aceeaşi linie de curent, în două secţiuni S_1 şi S_2, de arii transversale diferite, A_1, respectiv A_2 ale tubului Venturi (Fig. 8.1.L)

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}$$

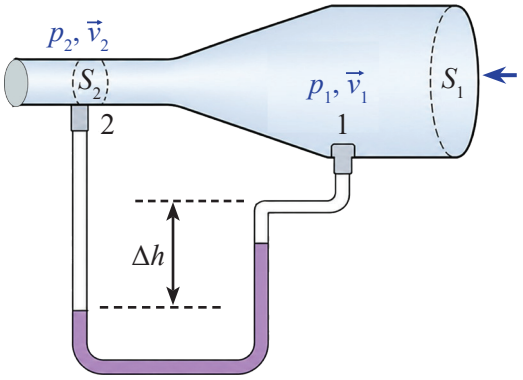


Fig. 8.1.L

Ariile secţiunilor transversale pot fi exprimate în funcţie de diametrele tuburilor. Ecuaţia de continuitate devine:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \pi \cdot \frac{d_1^2}{4} \\ A_2 &= \pi \cdot \frac{d_2^2}{4} \\ A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi \cdot \frac{d_1^2}{4} \cdot v_1 = \pi \cdot \frac{d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow d_1^2 \cdot v_1 = d_2^2 \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{d_1^2 \cdot v_1}{d_2^2}$$

Înlocuind viteza v_2 în ecuaţia lui Bernoulli, obţinem relaţia dintre viteza de curgere și diferența de presiune:

$$\left.\begin{aligned} p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} &= p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \\ v_2 &= \frac{d_1^2 \cdot v_1}{d_2^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot \left(d_1^2 \cdot v_1\right)^2}{2\left(d_2^2\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} v_1 &= d_2^2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left(d_2^4 - d_2^4\right)}} \\ Q_V &= \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot v_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_V = \frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot d_2^2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left(d_2^4 - d_2^4\right)}} \qquad \text{(8.1.L.)}$$

Manometrul cu lichid (apă) măsoară diferenţa dintre presiunile p_1 şi p_2:

$$p_1 = p_2 - \rho_l \cdot g \cdot h \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho_l \cdot g \cdot h$$

Revenind în relaţia 8.1.L.:

$$Q_V = \frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot d_2^2 \sqrt{\frac{2\rho_l \cdot g \cdot \Delta h}{\rho\left(d_2^4 - d_2^4\right)}}$$

Astfel, la viteze mici de curgere, considerând aerul un fluid ideal cu densitate aproximativ constantă, debitul volumic poate fi determinat cunoscând diametrele celor două secţiuni ale tubului Venturi, densitatea lichidului manometric şi diferenţa de nivel h a lichidului din manometru.

Materiale necesare

– tub Venturi;
– suflantă (compresor) cu tub de legătură;
– manometru cu lichid;
– riglă.

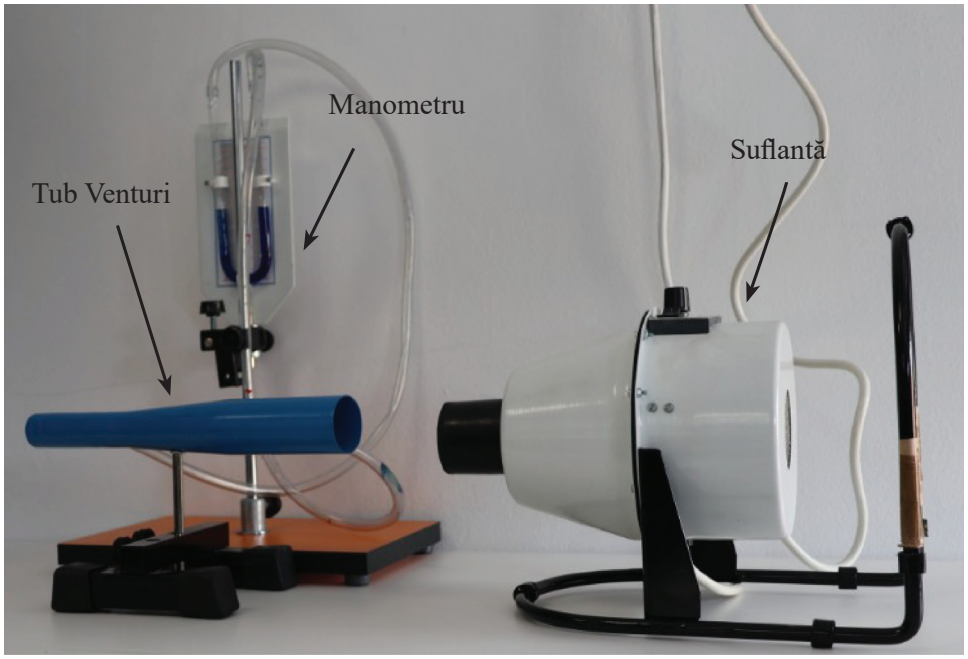


Fig. 8.2.L

Modul de lucru şi prelucrarea datelor experimentale

• *Măsoară* diametrele celor două secţiuni S_1 şi S_2 şi notează valorile.

• *Montează* tubul Venturi pe conducta prin care curge fluidul (în cazul nostru, la suflantă).

• *Conectează* manometrul diferenţial între secţiunea largă şi cea îngustă.

• *Aşteaptă* să se stabilizeze diferenţa de nivel Δh a lichidului din manometru.

• *Măsoară* diferenţa de nivel Δh a lichidului din tubul manometric (fig 8.3.L).

• *Repetă experimentul* pentru alte două fluxuri de aer.

• *Înregistrează* datele într-un tabel de forma:



Fig. 8.3.L

Nr. crt.	Flux	Δh/cm	Q_v/(m³/s)	$\overline{Q}_v$/(m³/s)	ΔQ_v/ (m³/s)	$\Delta\overline{Q}_v$/(m³/s)
1.	I					
2.	II					
3.	III					

• Pentru prelucrarea datelor, *consideră* pentru aer densitatea $\rho = 1{,}2$ kg/m³, iar pentru lichidul din tubul manometric (apă) $\rho_l = 1000$ kg/m³ .

• *Prezintă* rezultatul sub forma: $Q_V = \left(\overline{Q}_V \pm \Delta\overline{Q}_V\right)\left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)$

• *Identifică şi notează* cel puţin trei surse de erori.

Concluzii. Interpretarea rezultatelor

• *identifică* în viaţa cotidiană unde se folosesc tuburile Venturi;

• *explică*, folosind un limbaj specific fizicii, de ce este nevoie să aştepţi să se stabilizeze diferenţa de nivel a lichidului din tubul manometric;

• *notează* proprietăţile curgerii staţionare;

• *explică* motivul pentru care ai reluat fiecare experiment de cel puţin trei ori.

INVESTIGHEAZĂ, DESCOPERĂ, ÎNVAȚĂ!

Formulează concluzii argumentate analizând observaţiile făcute în timpul investigaţiilor ştiinţifice.

O minge de tenis de masă, lăsată liberă în apă, urcă la suprafaţă, iar o bilă de metal, de aceeaşi formă, se scufundă. Acţionează lichidul asupra unui corp introdus în el? Diferă această acţiune de la un corp la altul?

Investighează mecanismul prin care fluidul acţionează asupra corpurilor, realizând următoarele experimente.

Partea I

Materiale necesare:

• vas gradat;

• apă (d_s = 1 g/cm^3);

• corpuri din materiale diferite, având aceeaşi masă şi aceeaşi formă.

Provocarea nr. 1: Investigaţie

Mod de lucru: Ai la dispoziţie vas gradat, în care torni lichid (apă), şi trei corpuri (de exemplu, o minge de tenis de masă, o bilă de metal şi o bilă de lemn) realizate din materiale diferite, având aceeaşi masă şi aceeaşi formă geometrică, dar dimensiuni şi volume diferite.

Vasul gradat se află în echilibru în câmp gravitaţional uniform.

• **Introdu** corpurile pe rând, în apă. **Ce observi?** Se scufundă corpurile sau plutesc pe suprafaţa liberă a lichidului?

• **Formulează** o ipoteză referitoare la motivul pentru care corpurile plutesc sau se scufundă.

• **Notează** ipoteza în fişa de lucru, sub forma unui răspuns la întrebarea: **Introduse în lichid, interacţionează corpurile şi cu acesta?**

• Care sunt mărimile fizice cu care poţi descrie fenomenul? **Notează** aceste mărimi fizice în fişa de lucru.

• **Compară** mărimile notate de tine cu cele notate de colegul tău de bancă. Sunt identice?

• **Subliniază** mărimile fizice comune.

Partea a II-a

Provocarea nr. 2

A. Premisă:

Masa corpurilor este aceeaşi, corpurile sunt introduse în acelaşi lichid, dar **forţele cu care lichidul acţionează asupra corpurilor sunt diferite.**

• **Pentru a stabili caracteristicile forţei datorate** interacţiunii corp-lichid, **reaminteşte-ţi** care sunt mărimile fizice de care depinde masa corpului.

• **Notează** în caiet relaţia matematică dintre masă, densitate şi volumul corpului.

B. Analiză:

Materiale necesare:

• vas gradat în care se află apă;

• corpuri:

– din materiale diferite, având volume egale și aceeaşi formă;

– din acelaşi material, având aceeaşi formă, dar volume diferite;

– din acelaşi material, având acelaşi volum, dar formă diferită;

• dinamometru.

Mod de lucru:

• Ştiind masa şi volumul corpurilor, m şi, respectiv, V, şi folosind relaţia matematică dintre masă, volum şi densitate, **determină** densităţile fiecăruia dintre corpuri.

• **Notează** valorile densităţilor într-un tabel în care mai notezi şi masa şi volumul corpurilor.

• **Bifează,** în tabelul mai jos, mărimile fizice despre care crezi că pot influenţa valoarea forţei cu care lichidul acţionează asupra corpului introdus în vas.

	Da	Nu	Observaţii
Densitatea corpului			
Volumul corpului			
Densitatea lichidului			

Verifică predicţiile făcute efectuând următoarele experimente:

B.1: Predicţia referitoare la modul în care crezi că se modifică forţa exercitată de lichid atunci când volumul corpului creşte.

• **Măsoară** volumul iniţial de lichid din vasul gradat.

• **Suspendă de resort**, pe rând, corpurile din acelaşi material (au densităţi egale), care au aceeaşi formă, dar **volume diferite**.

• **Introdu** corpurile suspendate de resort, pe rând, în apă. Asigură-te că din vasul gradat nu se varsă apă.

• **Măsoară** noul nivel al lichidului din vas.

• **Răspunde** la întrebarea: **Ce legătură există între volumul corpului scufundat şi volumul de lichid dezlocuit (egal cu diferenţa dintre cele două volume de lichid măsurate la înainte, respectiv după introducerea corpurilor în lichid)?** Notează răspunsul în fişa de lucru.

• **Compară indicaţiile dinamometrului** înainte şi după introducerea corpului în lichid.

• **Stabileşte** o relaţie de ordine între volumele corpurilor.

• **Stabileşte** o relaţie de ordine între deformările resorturilor.

• **Corelează** cele două relaţii de ordine.

• **Notează** concluziile tale în fişa de lucru sub forma unui răspuns la întrebarea: **Depinde forţa arhimedică de volumul de lichid dezlocuit?**

• **Argumentează** răspunsul notând în fişa de lucru datele care susţin concluzia ta.

B.2. Procedează în mod asemănător, investigând separat presupunerile referitoare la alte mărimi fizice notate în fişa de lucru (de exemplu, densitatea sau forma corpului), despre care crezi că ar putea influenţa valoarea forţei arhimedice. Pentru fiecare dintre cazuri, formulează ipoteza, realizează experimentul, notează observaţiile şi formulează concluzii. Notează concluziile în fişa de lucru.

Provocarea nr. 3

A. Premisă:

Forţa care acţionează asupra corpului se datorează interacţiunii corp-lichid.

Influenţează natura lichidului valoarea acestei forţe?

B. Analiză

• **Formulează** o ipoteză referitoare a dependenţei forţei de interacţiune corp-lichid de natura lichidului din vas.

• **Propune** un experiment cu ajutorul căruia să verifici presupunerea ta.

• **Efectuează experimentul** pentru a verifica ipoteza. Poţi folosi sare pentru a modifica densitatea lichidului în care scufunzi corpul suspendat de dinamometru.

• **Formulează** o concluzie referitoare la dependenţa natura lichidului – forţă de interacţiune.

• **Argumentează** răspunsul notând în fişa de lucru datele care susţin concluzia ta.

Compară ipoteza formulată la începutul activităţii cu concluziile obţinute după realizarea experimentelor. Ce ai descoperit nou?

Provocarea nr. 4

Aplică ceea ce ai descoperit!

1. Pe baza tuturor concluziilor formulate, redactează, în maximum 5 rânduri, o explicaţie a fenomenului de plutire şi scufundare a corpurilor.

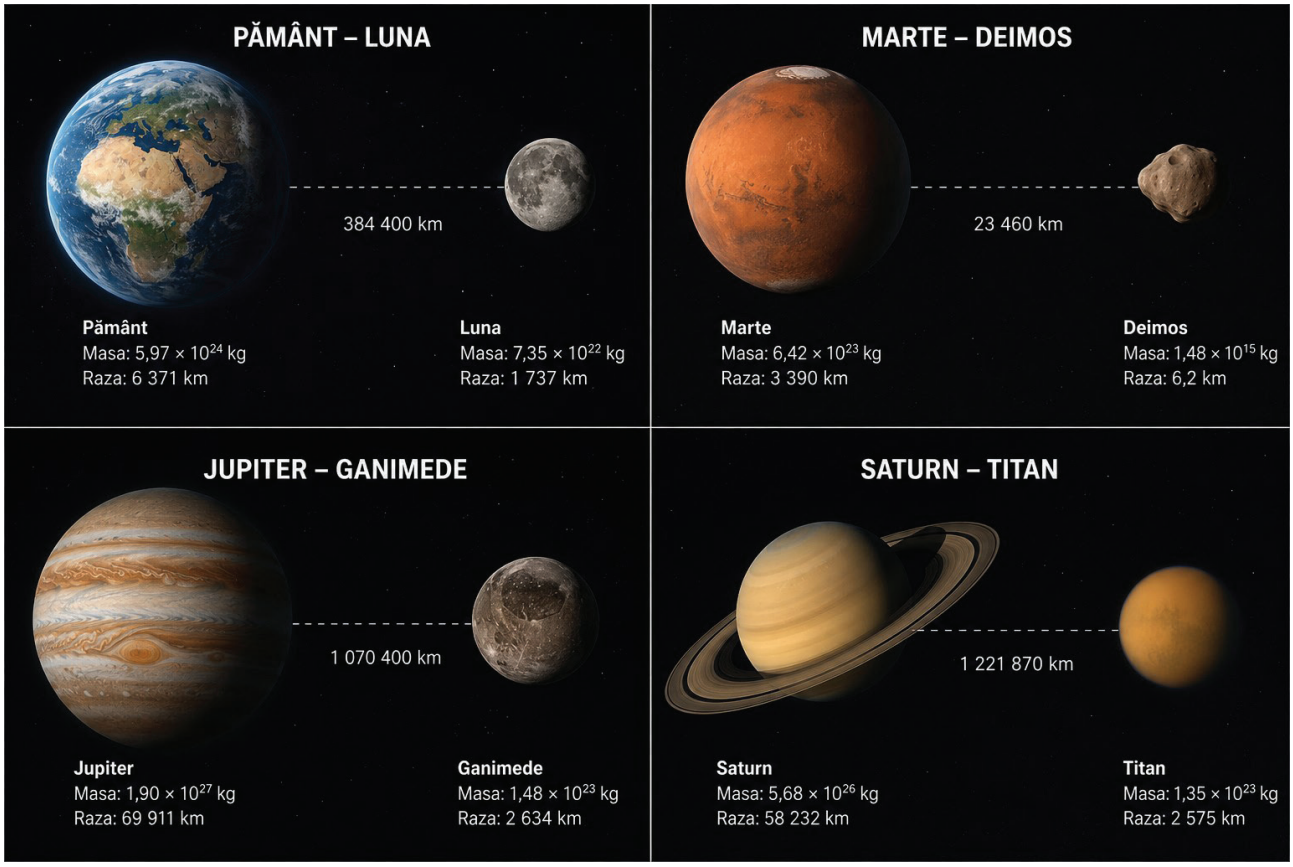
2. Ce experimente crezi că ar trebui să efectuezi pentru a stabili o relaţie matematică între mărimile fizice de care depinde forţa arhimedică?

3. Folosind concluziile investigaţiei, răspunde la următoarea întrebare: este mai uşor să pluteşti în Marea Moartă decât în Marea Neagră?

4. Explică modul în care un submarin poate urca sau coborî în apă.

La plimbare prin Sistemul Solar

În figura de mai jos sunt prezentate câteva date referitoare la unele dintre sistemele planetă-satelit din Sistemul Solar. Desenul nu este realizat la scară. Distanţele indicate în imagine sunt măsurate între centrele corpurilor cereşti. Corpurile cereşti se consideră puncte materiale faţă de distanţele dintre ele. Consideră $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.



1. Presupunând că ai călători cu viteza constantă v = 3000 km/h, calculează în cât timp ai ajunge de pe Pământ pe Lună. (Nava Orion a misiunii Artemis II, una dintre misiunile NASA spre Lună, a avut o viteză medie (aproximativ) v = 3680 km/h).

2. Deimos este un satelit de formă neregulată.

a. Presupune că forma sa poate fi aproximată ca fiind o sferă. Calculează prima viteză cosmică pentru acest satelit.

b. O săritură pe Pământ are o înălţime medie de aproximativ 30 cm. Un elev sare sub un unghi de 60° faţă de verticala locală. Presupunând că acelaşi elev sare pe Deimos cu aceeaşi viteză iniţială, sub acelaşi unghi, compară componenta orizontală a vitezei iniţiale pe Pământ cu prima viteză cosmică pe Deimos. Se neglijează rezistenţa aerului. Interpretează fizic rezultatul obţinut.

3. Jupiter este cea mai mare planetă din Sistemul Solar. Este atât de mare încât, practic, toate celelalte planete ar încăpea în interiorul său. Ganimede este cel mai mare satelit din Sistemul Solar, având raza de aproximativ 1,078 ori mai mare decât raza planetei Mercur. Calculează de câte ori este mai mare acceleraţia gravitaţională la nivelul considerat suprafaţă (planeta este un gigant gazos) pentru Jupiter faţă de acceleraţia gravitaţională pe suprafaţa Pământului.

4. Ştiind că volumul unei sfere este $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$, ce planetă, din cele patru menţionate ar putea pluti pe apă?

Teme individuale

A. PROIECT, la alegere:

I. a. Realizează o lucrare în care să descrii **tema preferată** studiată în acest an școlar la disciplina Fizică.

b. Alcătuiește o problemă (pe care să o propui spre rezolvare colegilor tăi), utilizând mărimi fizice din tema prezentată.

c. Evaluează rezolvările colegilor tăi conform baremului stabilit de tine.

În elaborarea lucrării, asigură-te că:

- fenomenul fizic ales este prezentat riguros, utilizând un limbaj științific adecvat, specific Fizicii;
- fenomenul fizic este corect descris matematic prin relații de calcul, reprezentări grafice sau diagrame, în acord cu legile Fizicii;
- ai evidențiat aplicațiile practice ale fenomenului studiat și conexiunile cu viața cotidiană;
- ai identificat asemănări, diferențe sau conexiuni cu alte teme studiate la Fizică.

Prezintă lucrarea colegilor sub forma unui **poster științific** sau a unei **prezentări PowerPoint.**

Prezentarea trebuie să fie clară, coerentă și bine structurată, iar suportul vizual să includă, acolo unde este necesar, imagini, grafice, scheme sau diagrame relevante pentru înțelegerea fenomenului studiat. Prezentarea nu trebuie să dureze mai mult de 15 minute.

II. Realizează și filmează un experiment simplu.

Descrie fenomenul observat folosind un limbaj științific adecvat și noțiunile studiate la clasă. În explicație, utilizează legi ale fizicii, mărimi fizice, simboluri și relații matematice relevante.

Exemple: **căderea unei mingi elastice** (ciocnirea acesteia cu podeaua și revenirea ei la o anumită înălțime), **mașinuță propulsată de un balon** (pentru ilustrarea principiului acțiunii și reacțiunii), **jocul de biliard sau snooker** (ciocnirea elastica a doua corpuri), **lovirea unei mingi "cu efect"** (efectul Magnus) etc.

III. Construiește o catapultă miniaturală din bețe de înghețată.

Analizează traiectoria unui proiectil. Descrie fenomenul observat folosind un limbaj științific adecvat și noțiunile studiate la clasă. Utilizează în explicație legi ale Fizicii, mărimi fizice, și relații matematice relevante.

B. PORTOFOLIUL – Pe parcursul anului școlar, pregătește pentru portofoliul tău:

- două fișe de laborator redactate după efectuarea lucrărilor de laborator propuse în manual;
- rezolvările problemelor din testele de evaluare existente în manual;
- 10 probleme rezolvate suplimentar, din manual sau dintr-un auxiliar;
- o fișă despre biografia și realizările în domeniul fizicii ale unui fizician;
- o descriere a unui fenomen fizic observat în viața cotidiană sau într-un muzeu de științe (însoțește descrierea de o fotografie sau de un scurt film realizate de tine);
- un proiect realizat.

Indicaţii și răspunsuri

CAP. 1.

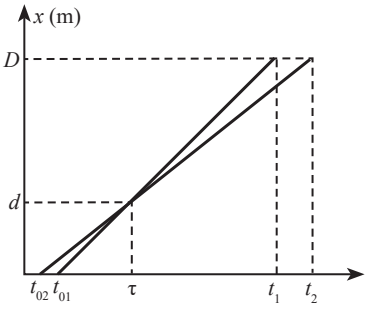
Pag. 18 – Test de evaluare: 1. a; **2.** c; **3.** c; **4.** b; **5.** unitate de măsură / etalon; **6.** Δx reprezintă eroarea absolută medie sau incertitudinea măsurării. **7.** Termometrul ***A* este mai precis**, deoarece valorile obținute la citiri repetate sunt foarte apropiate între ele. Totuși, el nu este exact, deoarece toate valorile sunt cu aproximativ 3°C mai mari decât temperatura reală. Termometrul ***B* este mai exact**, deoarece media valorilor măsurate este apropiată de temperatura reală, dar este mai puțin precis, deoarece valorile oscilează mult. **8.** În primul caz poate apărea o **eroare de observator**, numită și **eroare de paralaxă**. Privirea oblică a scalei poate face ca poziția acului sau indicația aparatului să fie citită greșit. Citirea corectă se face privind perpendicular pe scală. **9. a)** Valoarea care poate fi considerată eroare grosolană este: 26,6 cm^3. **b)** $\overline{V} = 23,7\,\text{cm}^3$; ΔV = 0,1 cm^3. **c)** Rezultatul măsurării este: $V = (23,7 \pm 0,1)$ cm^3.

CAP. 2.

Pag. 37 – 1. a) Coordonata inițială, respectiv momentul de timp în care mobilul trece prin originea sistemului de coordonate xOy. **b)** $v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} = \dfrac{0 - 20}{40 - 0} = -0,5$ m/s. Mobilul de deplasează în sens opus sensului pozitiv ales pentru axa Ox. **c)** $x = 20 - 0,5t \Rightarrow x = 20 - 0,5 \cdot 8 = 16$ m.

2. $v_{med} = \dfrac{2d}{\Delta t_1 + \Delta t_1} = \dfrac{2d}{\dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2}} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 13,33$ m. **3. a)** $\Delta t_1 = \dfrac{l + L}{v_1 - v_2} = 15$ s; **b)** $\Delta t_2 = \dfrac{l + L}{v_1 + v_2} = 3,75$ s.

4. $v_{\text{med}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot v_i}{\sum_{j=1}^{n} \Delta t_j}$. **5.** $v_{\text{med1}} = \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n} \geq \dfrac{n}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \ldots + \dfrac{1}{v_n}} = v_{\text{med2}}$.



6. $D = 100$ m, $t_{01} = t_{0\,\text{Usain}} = 0,155$ s, $t_{02} = t_{0\,\text{Brommell}} = 0,135$ s, $t_1 = t_{\text{Usain}} = 9,81$ s, $t_2 = t_{\text{Brommell}} = 10,06$ s, $d = D\dfrac{t_{01} - t_{02}}{(t_2 - t_{02}) - (t_1 - t_{01})} \approx 7,4$ m.

7. $d_{\min} = \dfrac{\left|x_0v_y - y_0v_x\right|}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$; $x_0v_x + y_0v_y = 0$, cele două mobile se află la distanță minimă chiar la momentul considerat; $x_0v_x + y_0v_y < 0$, cele două mobile urmează să se afle ulterior la distanță minimă;

$x_0v_x + y_0v_y > 0$, cele două mobile s-au aflat eventual anterior la distanță minimă.

8. $d = \frac{c\tau}{2}\sqrt{\frac{2l}{c\tau}+1-\frac{v^2}{c^2}}$. **9.** $v = \frac{c}{\sin\alpha}$ **10.** $t = \frac{2l}{3v}$ (la centru), $d = \frac{2l}{3}$.

Pag. 44 – 1. a) $a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = 0{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; **b)** $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 760$ m; **c)** $s = x - x_0 = 750$ m (coincide cu aria delimitată de graficul $v\,(t)$, axa Ot și dreptele verticale $t_0 = 0$ s, respectiv $t = 60$ s).

2. a) $\left.\begin{matrix} x = 2 + 3t - 2t^2 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = 0{,}5$ s; **b)** $v = 3 - 4t$; c. $\left.\begin{matrix} v = 3 - 4t \\ v = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t = 0{,}75$ s.

3. $a = -1{,}5$ m/s^2. **4.** $d = 3600$ m. **5. a)** $t_1 = \frac{v}{a} = 30$ s; **b)** $d_2 = v \cdot (\Delta t - 2t_1) = 1{,}8$ km;

c) $d = 2\frac{v^2}{a} + d_2 = 2{,}7$ km. **6. a)** $a_1 = \frac{2L}{t_1^2} = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; **b)** $v_A = \frac{2L}{t_A} = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; **c)** $\Delta t = t_A + \frac{2D}{v_A} = 40$ s;

d) $v_{med} = \frac{L + D}{\Delta t} = 7{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pag. 51 – 1. $\nu = \frac{300}{60} = 5\,\frac{\text{rot}}{\text{s}}$, $\omega = 2\pi\nu \cong 31{,}4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. **2.** $\nu = \frac{v}{\pi D} \cong 31{,}8\,\frac{\text{rot}}{\text{s}}$, $n \cong 1911\,\frac{\text{rot}}{\text{min}}$.

3. $\left.\begin{matrix} \theta_1 - \theta_2 = 2\pi \\ \theta = \omega\tau \end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 - \frac{2\pi}{\tau}$, $\theta_2 = \omega_1\tau - 2\pi$. **4.** $\omega_{\text{minutar}} = \frac{2\pi}{T_{\text{minutar}}} = \frac{\pi}{1800\text{s}} \approx 1{,}74 \cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$,

$\omega_{\text{orar}} = \frac{\omega_{\text{minutar}}}{12} \approx 0{,}145 \cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$, $\Delta t = \frac{1}{\frac{1}{T_{\text{minutar}}} - \frac{1}{T_{\text{orar}}}} = 1\text{h } 5\text{min } 27{,}27\text{s}$. **5.** Viteza motocicletei este aceeași cu viteza liniară a punctelor de pe circumferința roții. **a)** $\omega = \frac{2v}{D} = 1$ rad/s,

b) $s = vT = \pi D \cong 1{,}26$ m. **6. a)** $a = (2\pi\nu)^2 \cdot d \cong 11370\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, **b)** $\frac{a}{g} = 1137$.

Pag 52 – Test de evaluare: 1. c. **2.** A, F, F, A. **3.** Afirmația este falsă, deoarece un corp poate fi considerat punct material atunci când dimensiunile sale sunt neglijabile în comparație cu distanțele parcurse sau cu dimensiunile sistemului studiat. **4.** De exemplu, în studiul mișcării Pământului în jurul Soarelui, raza Pământului este foarte mică raportată la distanța dintre Pământ și Soare. Din acest motiv, Pământul poate fi considerat punct material în multe probleme de mecanică. **5.** Taximetrul „înregistrează" lungimea traseului parcurs. Dacă taxiul face ocoluri, merge pe străzi curbe sau schimbă direcția, lungimea traiectoriei crește. La fel și suma de plată. **6.** c. **7.** 11,25 m. **8.** Pământul și avionul au aceeași perioadă de rotație. $v = \frac{2\pi}{T}(R + h) \cong 465{,}2$ m/s.

9. c) $t_{op} = \frac{v_{0t}}{a}$, $\Delta s = v_0 t_{op} - \frac{v_0^2}{2a} = 200$ m.

CAP. 3

Pag. 61 – 1. a) 5 km/h; **b)** 15 km/h; **c)** 16 h. **2. a)** $t \approx 1005$ s; **b) 1010 s**; c) 1000 s. **3. a)** $v' = 18,4$ m/s; **b)** $\alpha = 22,4°$.

Pag. 75 – 1. $\frac{T_1}{T_2} = 0,5$. **2.** $m_1 = 1$ kg, **3. a)** desen; **b)** 0,578; **c)** $\sin\alpha \geq 0,667$; **d)** 5,75 m/s^2.

Pag. 80 – 1. Prin rotirea rapidă a cilindrului interior, corpurile „sunt împinse" spre exterior (de fapt, în acord cu principiul inerției, ele tind să își păstreze starea inițială de repaus, dar sunt constrâns de peretele cilindrului să se rotească). Lichidul iese prin orificii și este colectat în vasul exterior. Solidele (hainele) rămân în interiorul cilindrului perforat, deoarece nu pot trece prin orificii. **2. a)** Un automobil luând o curbă în plan orizontal, dacă traiectoria virajului are forma unui arc de cerc. **b)** Rufele dintr-un storcător de rufe centrifugal, având cuva montată vertical. **c)** Copiii dându-se în lanțuri într-un parc de distracții. **3.** Sistemul de referință asociat călătorului aflat pe scaun în autobuzul care virează este sistem de referință neinerțial. Într-un sistem de referință neinerțial, asupra corpurilor acționează o forța de inerție (centrifugă), orientată spre exteriorul traiectoriei. **4.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{gR}$. **5. a)** $N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \cong 38750$ N; **b)** $N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) \cong 61250$ N.

6. $\omega = \sqrt{\frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{R(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}} = 1,83\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. **7. a)** $T_{\min} = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) = 1$ N; **b)** $T_{\max} = m\left(\frac{v^2}{L} + g\right) = 3$ N.

8. $N = 0 \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \cdot \cos\theta \Rightarrow h = \frac{v^2}{g}$. **9.** $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0,71$ Hz.

Pag. 83 – 1. $d_{P-S} = \sqrt{\frac{K \cdot M_S \cdot m_P}{F}} \cong 1,496 \cdot 10^8$ km. **2.** $F = K \cdot m_3 \cdot \sqrt{\left(\frac{m_1}{d_1^2}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{d_2^2}\right)^2}$, $F = K \cdot m_3 \cdot \left|\frac{m_1}{d_1^2} - \frac{m_2}{d_2^2}\right|$.

3. $\frac{F_{S-Sat}}{F_{S=P}} = \frac{m_{Sat}}{m_P} \cdot \left(\frac{d_{S-P}}{d_{S-Sat}}\right)^2 = \frac{10}{9,5} \cong 1,05$. Este un rezultat foarte interesant: deși Saturn este mult mai departe de Soare decât este Pământul (ceea ce ar micșora forța de atracție exercitată de Soare asupra planetei Saturn), masa mare a acestei planete compensează aproape perfect acest efect.

Pag. 89 – 1. Masa m_p trebuie să fie infinit de mică pentru ca intensitatea câmpului gravitațional propriu generat de aceasta să fie neglijabilă și să nu altereze în niciun fel configurația câmpului gravitațional din imediata vecinătate a punctului în care este introdusă. **2.** $g_0 = K\frac{M_P}{R^2} \Rightarrow M_P = \frac{g_0 \cdot R^2}{K} \cong 6 \cdot 10^{24}$ kg.

3. $g_h = K\frac{M_P}{(R+h)^2} = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow g_h = \frac{g_0}{(1+n)^2} \cong 0,62\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **4.** $G_{Pl} = m \cdot g_{Pl} = 12m \cdot g_0$.

5. $m \cdot a_n = K\dfrac{m \cdot M_{ast}}{R_{ast}^2} \Rightarrow T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{K \cdot \rho}}$. **6.** *Indicație:* Imaginează-ți că observi o stea foarte îndepărtată. Ce modificare a luminozității ei poți detecta atunci când o planetă trece periodic prin fața stelei? Puteți folosi (tu și colegul tău) o lanternă − sau chiar lanterna telefonului −, ca stea și o bilă drept planeta care trece prin fața „stelei". **b)** $A = 4\pi \cdot R^2 \Rightarrow R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, $\dfrac{F_{T-s}}{F_{P-S}} = \dfrac{\rho_T \cdot R_T^3 \cdot M_s}{\rho_P \cdot R_P^3 \cdot M_S} \cong 88 \cdot 10^3$. **d)** $\dfrac{g_T - g_P}{g_P} = \dfrac{\rho_T \cdot R_T}{\rho_P \cdot R_P} - 1$, $\dfrac{g_T - g_P}{g_P} = \dfrac{\rho_T \cdot \sqrt{A_T}}{\rho_P \cdot \sqrt{A_P}} - 1 \cong 94\%$. **7.** $g = \dfrac{2h}{t^2} = 9{,}830\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ursul este alb ($g_{=} g_p$).

Pag. 89 − Proiect: $\upsilon = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{R}} \cong 0{,}007$ Hz.

Pag. 90 − Test de evaluare: 1. d. **2.** b; **3.** A, F, F, F. **4.** Dacă o barcă se deplasează față de apa râului cu o viteză perpendiculară pe maluri, atunci viteza sa față de Pământ are o altă direcție și o altă valoare, ca urmare a compunerii vitezei bărcii cu viteza curentului apei. **5.** Deși picăturile de ploaie cad vertical, ele lasă urme înclinate pe geamul unui autoturism aflat în mișcare, deoarece urma este determinată de viteza relativă a picăturilor față de automobil. **6.** d); **7.** a); **8.** d); **9.** c).

CAP. 4.

Pag. 121 − 1. $\dfrac{F_1}{F_2} = 2$. **2. a)** 2,97 m/s; **b)** 445 J. **3. a)** 214,3 m/s; **b)** (8,57)10^5 J.

Pag. 122 − I: 1. A; 2. A; 3. F; 4. A; 5. F; 6. A; 7. F; 8. A; 9. A; 10. A; 11. A; 12. F; 13. A; 14. A; 15. F; 16. A; 17. A; 18. A; 19. F; 20. A; 21. A. II. Nivel elementar: 1. $m = 4$ kg; **2.** $E_p = 5$ J; **3.** $E_p = 20$ J; **4.** $E_{el} = 0{,}5$ J; **5.** $L = 74{,}24$ J; **6.** $k \approx 2{,}1 \times 10^5$ N/m; **7.** $\Delta E = 126{,}75$ J. **Nivel mediu: 8.** $\mu = 0{,}41$. **9. a)** $v = 140$ m/s; **b)** $E_{\text{pierdută}} = 5{,}5 \cdot 10^5$ J. Energia nu dispare, ea se transformă în principal în **energie termică**, prin frecarea cu aerul. **10. a)** $v \cong 2{,}14$ m/s; **b)** $T \cong 1{,}87$ N. **11.** $L = 224400$ J/min. **12. a)** $v \cong 4{,}60$ m/s; **b)** $E_c \cong 21{,}14$ J; **c)** $P_m \cong 30$ W. **Nivel avansat: 13.** $v \approx 3{,}16$ m/s; $x_{\max} \cong 11$ cm; $L_e \approx -0{,}83$ J; **14. a)** $v_{\text{capăt}} \cong 3{,}9$ m/s; **b)** $v_{\text{sol}} \cong 5{,}6$ m/s; **15. a)** $E_{m(A)} = 4{,}0$ J; **b)** $L_f \approx -1{,}38$ J; **c)** $v_B \approx 3{,}6$ m/s; **16. a)** $a = 10$ m/s^2; **b)** $L = 140$ J; **c)** v (4 m) = 7 m/s; **17.** $v \approx 2{,}16$ m/s; $T \approx 1{,}90$ N; **18.** a) $L_G = 0{,}15$ J; b) $E_{c\,(B)} = 0{,}15$ J; c) $v_{\text{sol}} \approx 4{,}9$ m/s; 19. **a)** $v_B \approx 16{,}2$ m/s; **b)** $N \approx 1{,}17 \cdot 10^4$ N; **20.** $h_{\max} \approx 8{,}5$ m; **21. a)** șoferul nu a respectat limita legală de viteză, viteza autoturismului înainte de frânare: 22,6 m/s (≈ 81 km/h; **b)** valoarea amenzii 930 lei. **22.** $\dfrac{F_1}{F_2} = 2$; **23. a)** 2,97 m/s; **b)** 445 J; **24. a)** 214 m/s; **b)** (8,57)10^5 J. **25.** $v = 250$ m/s. **26. a)** 6,5 m/s; **b)** 13,5 m/s.

Pag. 126 − Test de evaluare: 1. c; **2.** d; **3.** b; **4.** $L_{el} = -0{,}06$ J; **5.** $\dfrac{E_{c1}}{E_{c2}} = \dfrac{4}{3}$; **6. a)** 1280 J; **b)** − 720 J; **c)** $\text{tg}\alpha \cong 0{,}556$; **d)** $P_{\text{med}} \cong -280$ W; **e)** 16 m.

CAP. 5.

Pag. 138 – 1. $H = 5{,}5$ m; **2.** $\frac{F_{max}}{F_{min}} = 1{,}25$; **3.** $F_{ap} = 40$ N; **4.** $N_1 = 475$ N, $N_2 = 925$ N; **5.** 125 N; **6.** 425 N; **7.** $F = 280$ N. **8.** $m_{min} \approx 5$ kg. **9.** $x_C = \frac{7L}{10}$; $y_C = \frac{L}{2}$. **10. a)** $T_{AB} = 173$ N, $T_{AC} = 200$ N; **b)** $\alpha' = 30^o$ **11.** $tg\alpha = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}$ **12.** $x \le 1{,}6$ m.

Pag. 140 – Test de evaluare: 1. c; **2.** b; **3. a)** F; **b)** A; **c)** F; **d)** F. **4.** Conform informațiilor din manual. **5.** b; **6.** a; **7.** $R = 0$; **8. a)** $3 \cdot 10^5$ Nm; **b)** Roata Falkirk poate funcționa cu un consum redus de energie deoarece momentele greutăților lor se compensează aproape complet. Motorul trebuie să învingă doar diferența mică dintre momente și frecările din mecanism, nu să ridice întreaga masă transportată. **9.** 0,2 m.

CAP. 6

Pag. 147 – 1. a) $a_1 = 2$ m/s^2, $a_f = -5$ m/s^2; **b)** $d' = 60$ m; **2. a)** $R = 87{,}3$ m; **b)** $\mu_s = 0{,}458$.

Pag. 148 – Test de evaluare: 1. b; **2. a)** F; **b)** A; **c)** A; **d)** A. **3.** Conform informațiilor din manual. **4.** Conform informațiilor din manual**; 5.** Conform informațiilor din manual. **6.** Conform informațiilor din manual. **7.** 37,5 m; **8.** 60 m; **9. a)** 5 m/s^2; **b)** 350 N; **c)** 76,32 km/h. La limită momentul forței centrifuge față de punctul de contact al roții cu șoseaua este egal cu momentul greutății față de același punct $M \cdot \frac{v^2}{R} \cdot h = M \cdot g \cdot \frac{d}{2}$.

CAP. 7.

Pag. 156 – 1. De exemplu: Se marchează pe o coală de hârtie două puncte fixe, numite focare, folosind două ace. Se leagă o sfoară închisă în jurul acelor. Cu ajutorul unui creion, se întinde sfoara și se trasează curba, deplasând creionul astfel încât sfoara să rămână permanent întinsă. **2.** $a = a_1 \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_1}\right)^2} = 25UA$;

3. $d_{min} = 2a - d_{max} = 0{,}7UA$; **4.** $\frac{v_p}{v_a} = \frac{2a - d_p}{d_p}$; **5.** 1/3; **6.** $e = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}}$; **7.** $e = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}} = 0{,}08$;

8. a) $M = \frac{4\pi^2 r^3}{kT_N^{\ 2}} \cong 2{,}39 \cdot 10^{30}$ kg; **b)** $g = \frac{4\pi^2 r}{T_N^{\ 2}} \cong 9{,}66 \cdot 10^4 \frac{m}{s^2}$; **c)** $\omega = \frac{2\pi}{T_N} \cong 4{,}88 \cdot 10^{-2} \frac{rad}{s}$.

9. a) $1 \text{ a.l.} = c \cdot t \Rightarrow 1 \text{ a.l.} = 3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ m} = 9{,}46 \cdot 10^{15}$ m;

b) $M_P = \frac{5 \cdot 4}{3} \rho_J \cdot \pi \cdot R_J^3 \cong 1{,}02 \cdot 10^{28}$ kg; **c)** $g = \sqrt[3]{5} \frac{4\pi}{3} k \cdot \rho_J \cdot R_J \cong 44{,}9 \frac{m}{s^2}$. **10. a)** A; **b)** F; **c)** F; **d)** F.

Pag. 163 − 1. De exemplu Voyager 1, lansată în 1977 de NASA; în 2012 a intrat în spațiul interstelar.

3. a) A; **b)** A; **c)** F; **d)** A. **4.** *Indicație*: se conservă momentul cinetic. **5. a)** $v_S = \sqrt{k\frac{M_P}{R_P + h}} \cong 7463\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

b) $E_t = -K\frac{m_s \cdot M_P}{2(R_P + h)} \cong -3{,}17 \cdot 10^{10}$ J; **c)** $E_t' = -K\frac{m_S M_P}{2 \cdot 2(R_P + h)} \cong -1{,}59 \cdot 10^{10}$ J.

6. *Indicație*: $V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$; $\rho = \frac{3v_I^2}{4K \cdot S} \cong 1920\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

7. *Indicație:* Satelitul geostaționar are perioada de rotație pe orbită egală cu perioada de rotație a Pământului în jurul propriei axe (24 h), în plan ecuatorial.

$$h = \sqrt[3]{K\frac{M_P \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_P \cong 35{,}8 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

CAP. 8

Pag. 175-176 − 1. Interiorul avionului se depresurizează. **2.** Nivelul apei nu se modifică. **3.** A, F, F, A. **4. a)** 250 kPa, **b)** 2,5. **5.** *Indicație:* Pistonul se află în echilibru sub acțiunea forței elastice și a forțelor de presiune exercitate de aerul din cilindru, respectiv aerul din atmosferă: $p = p_0 \pm \frac{k \cdot \Delta l}{\pi r^2}$ după cum resortul este comprimat, respectiv alungit. **6.** 1000 kg/m^3; **7.** $f = 1 - \frac{\rho_g}{\rho} = 0{,}08$; **8.** *Indicație: Se compară greutatea sistemului „bloc de gheață + copil” cu forța arhimedică maximă, corespunzătoare situației în care blocul este scufundat până la marginea superioară.* Nivelul apei ajunge exact la suprafața superioară a blocului, astfel încât copilul nu se udă. **9.** Mișcarea pe verticală este independentă de cea pe orizontală. Componenta orizontală a vitezei nu influențează timpul necesar pentru a ajunge la suprafață sau la fundul bazinului. Accelerațiile bilelor vor fi tot cele calculate la subpunctul a, iar componenta pe axa *Oy* a vitezelor celor două corpuri va fi nulă. **10.** $p = \rho \cdot (g - a) \cdot h$; $p = 0$. **11.** $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$. **12. a)** $p = \rho(g + a)h$; **b)** $p = \rho(g - a)h$; **c)** $p = 0$.

13. a) $p = \rho \cdot g \cdot h = 6 \cdot 10^3$ Pa; **b)** $F = \pi \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot R^2 = 6 \cdot 10^3$ Pa $\cong 47{,}1$ N. **14.** $\rho_c = \frac{\rho \cdot g}{g - a} = 4 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Pag. 179 − 1. a) Nu. Particulele de fluid nu pot traversa pereții tubului de curent, deoarece acești pereți sunt formați chiar din linii de curent. **b)** Pe suprafața laterală a tubului, vectorii viteză sunt tangenți la suprafață, deci nu au componentă normală prin peretele tubului. Prin urmare, fluidul curge de-a lungul tubului de curent, nu traversează pereții tubului. **2.** În curgerea laminară: viteza de curgere este relativ mică, iar straturile de fluid se deplasează ordonat; liniile de curent sunt bine determinate și aproape paralele; nu apar vârtejuri. În curgerea turbulentă: viteza de curgere este mare, iar mișcarea fluidului este dezordonată; liniile de curent își modifică permanent forma; apar vârtejuri și amestecări între straturi.

3. a) Exemple de curgere laminară: deplasarea lentă a mierii sau a uleiului, ridicarea liniștită a unui fir de fum imediat după ieșirea din sursă etc.
b) Exemple de curgere turbulentă: curgerea rapidă a apei într-un râu de munte; valurile agitate ale mării în timpul furtunilor etc. **4.** $m \cdot g = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \Rightarrow v = \frac{m \cdot g}{6\pi \cdot \eta \cdot r}$.

Pag. 181 – 1. Da. În **regim staționar**, debitul masic este același prin orice secțiune a unui tub de curent.

2. $Q = A \cdot v = 24 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. **3.** $v_2 = \frac{A_1 \cdot v_1}{A_2} = 8$ m/s. **4.** $r = \sqrt{\frac{Q_m}{\pi \cdot \rho \cdot v}} = 1$ cm.

Pag. 186 – 1. Viteza mare a vântului determină creșterea presiunii dinamice. Conform principiului lui Daniel Bernoulli, de-a lungul unei linii de curent, suma presiunilor este constantă Astfel, imediat deasupra acoperișului, presiunea statică scade. Diferența de presiune dintre aerul de dedesubtul și cel de deasupra acoperișului produce o forță orientată de jos în sus, care poate ridica sau chiar smulge acoperișul.

2. A) a, c; **B)** d; **C)** a; **3.** $p_d = 3600$ Pa. **4.** $p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 10500$ Pa.

5. $Q = A_1 \cdot A_2 \sqrt{\frac{2\Delta h}{\rho\left(A_2^2 - A_1^2\right)}} \cong 0{,}16 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

6. $v = \sqrt{\frac{2\rho \cdot g \cdot h}{\rho}} \cong 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pag. 186 – Investighează: Colile se apropie una de cealaltă. Aerul dintre ele se deplasează cu viteză mare. Conform legii lui Bernoulli, în regiunea unde viteza fluidului este mai mare, presiunea statică este mică (mai mică decât presiunea atmosferică). Presiunea atmosferică (mai mare decât cea dintre coli) împinge colile una spre cealaltă.

Pag. 192 – 1. În fizioterapie, pacienții fac exerciții în apă deoarece, datorită forței arhimedice, corpul „devine mai ușor” iar articulațiile sunt mai puțin solicitate; pacienții cu probleme locomotorii pot face mișcări care sunt aproape imposibile pe uscat**. 2.** Submarinul își modifică poziția în apă prin schimbarea densității sale medii, folosind rezervoarele laterale de balast. Atunci când rezervoarele se umplu cu apă, masa submarinului crește, iar greutatea sa devine mai mare decât forța arhimedică. În această situație, submarinul se scufundă. Când apa este eliminată din rezervoare cu ajutorul aerului comprimat, masa și densitatea medie a submarinului scad. Forța arhimedică devine egală sau mai mare decât greutatea submarinului, iar acesta poate pluti sau urcă spre suprafață. Aceste manevre sunt necesare pentru controlul scufundării, al plutirii și al deplasării submarinului la diferite adâncimi.

3. În acord cu ecuația de continuitate, viteza crește. **4.** Peștii cu schelet osos își modifică volumul corpului cu ajutorul vezicii înotătoare, un organ umplut cu gaze. Atunci când vezica se umple cu gaze, volumul peștelui crește, iar densitatea sa medie scade. Forța arhimedică depinde de volumul de apă dezlocuit. Astfel, prin mărirea volumului, forța arhimedică devine mai mare decât greutatea peretelui, iar acesta urcă spre suprafață. **5.** $L = p \cdot \Delta V = 250$ J. **6. a)** $F = m \cdot g \cdot \frac{s}{S} = 400$ N; **b)** $k = \frac{S}{s} = 30$.

7. *Indicație:* $F_{\min} \cdot d \cdot \cos\alpha = \left(p_0 + \rho_a \cdot g \cdot h - p\right)\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{d}{2} + m \cdot g \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos\alpha$, $F_{\min} \cong 300$ N.

Pag. 198 − La plimbare prin Sistemul Solar

1. 5 zile şi 8 ore **2. a)** $v_I = 4$ m/s; **b)** $v_x \approx 4{,}2$ m/s, $v_I \approx 4{,}0$ m/s, componenta orizontală a vitezei săriturii este aproape egală cu prima viteză cosmică pe Deimos. *Interpretare fizică:* pe Deimos, o săritură obișnuită ca viteză inițială ar fi extrem de periculoasă. Componenta orizontală ar fi suficient de mare pentru ca elevul să devină satelit al lui Deimos. **3.** Aproximativ 2,64. **4. a)** $\rho_S = \frac{3M_S}{4\pi \cdot R_S^3} \cong 690 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, da; $\rho_S < \rho_a$ (Saturn).

Bibliografie

1. Alfa Vega – Trusa elevului / profesorului – liceu

2. Druică Zeletin, I., Popescu A., (1995), *Probleme de Fizică, Mecanică*, Editura Foton. București

3. Hristev, A., (1982), *Mecanică şi acustică*, Editura Didactică și Pedagogică, București

4. Luca, R., (2005), *Învăţăm FIZICA rezolvând probleme,* Editura Polirom, Iaşi

5. Standarde de competență în domeniul TIC pentru cadrele didactice (SCCD-TIC) (2008), *Module de standarde de competenţă*. UNESCO

6. Stoica, I., Moraru S., Miron C.,(2010), *An argument for a paradigm shift in the science teaching process by means of educational software, Second World Conference on Educational Sciences (WCES 2010),* Istanbul, February 4-8, Published by Elsevier Ltd. in Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2(2), 4407-4411 .

7. *Cursul de fizica Berkeley, volumul 1, Mecanica*, (1981), Editura Didactică și Pedagogică, București

8. Epstein , L., C., (2005), *Gândiți fizica!,* Editura All, București

9. Hugh, D. Y., (2011), *College Physics. Ninth Edition*, Pearson new international edition 10. Hewitt Paul, G., (2006), *Conceptual Physics tenth edition*, Pearson International Edition

11. Tsokos, K. A., (2023), *Physics for the IB diploma, seventh edition*, Cambridge University Press

12. Urone, P. P. R., (2020), *Physics, High School,* Openstax,

13. Hristev, A. și al., (1988), *Manual de fizică pentru clasa a IX-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București

14. Mantea, C, Garabet, M., (2004), *Fizică: manual pentru clasa a IX-a*, Editura Bic All

15. Pauşan, N., și Aur, C., (2011), *Auto Control – Tehnici și tactici de conducere defensivă și sportivă,* Editura Napoca Star

16. Luca, R., Perjoiu, R., (2010), *Listă de termeni Teste-grilă Probleme*. Editura Polirom.

17. Hristev, A., (1984), *Probleme de fizică date la examene*, Editura Tehnică

18. https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3APortrait_de_Blaise_Pascal_ %28MARQ_999.3.1%29.jpg?utm_source=chatgpt.com

19.https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ADomenicoFetti_Archimedes_1620.jpg?utm_source=chatgpt.com